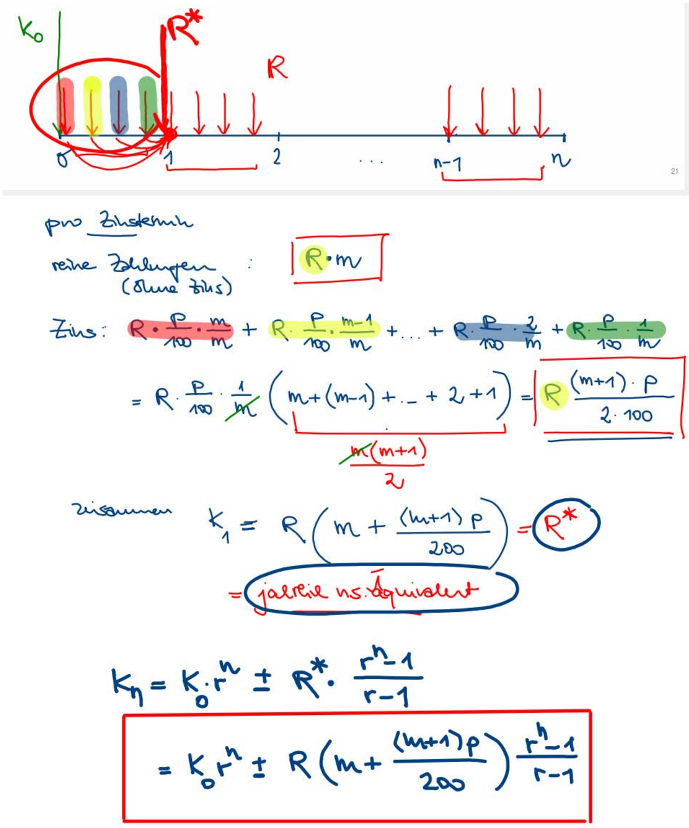
Rentenmathematik



Jürg Stricker
Stefan Ott

2020

Rentenmathematik

Jürg Stricker
Stefan Ott

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Folgen

1.1.1 Definition

Beispiel 1.1
Wir betrachten folgende Folgen in tabellarischer Darstellung
a) (2, 4, 6, 8, ...)
b) (1, 4, 9, 16, ...)
c) (1, 2, 4, 7, 11, ...)
Ergänzen Sie die Folgen um je drei weitere Folgenglieder.

Ordnen wir den natürlichen Zahlen 1,2,3,4,... durch irgendeine Vorschrift je genau eine reelle Zahl zu, so entsteht eine **Folge.** Durch die Zuordnung ist eine Funktion definiert.

Definition 1.1

Eine Funktion der Form $f: \mathrm{IN} \rightarrow \mathrm{IR}; n \mapsto f(n) = a_n$ heisst **Folge** (**Zahlenfolge**).

Bemerkungen:
1. Die Folge bezeichnen wir kurz mit (a_n).
2. Die zugeordneten Zahlen heissen **Glieder**. Wir bezeichnen das erste Glied mit a_1, das zweite mit a_2, ... , das n-te mit a_n. $n \in \mathrm{IN}$.

Beispiel 1.2
$(a_n) = (1,3,5,7,9,...)$ ist die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen.

$$f: \mathrm{IN} \rightarrow \mathrm{IR}; n \mapsto a_n = 2n - 1 = f(n)$$

$$1 \mapsto a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = f(1)$$
$$2 \mapsto a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 = f(2)$$
$$\ldots$$
$$n \mapsto a_n = 2 \cdot n - 1 = 2n - 1 = f(n)$$

Folgen können verschieden definiert werden.

Beispiel 1.3
Tabellarische Darstellung: $(a_n) = (1,3,5,7,...)$
Analytische (**explizite**) Darstellung: $a_n = 2 \cdot n - 1$ oder $a_n = 2 \cdot (n-1) + 1 \quad n \in \mathrm{IN}$
Rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + 2$ Startglied $a_1 = 1 \quad n \in \mathrm{IN}$

Bei der analytischen Darstellung ist das allgemein n-te Glied der Folge a_n durch einen Term in der Variablen n definiert.

1.1.2 Die arithmetische Zahlenfolge

Definition 1.2

Eine Zahlenfolge heisst **arithmetische Zahlenfolge** (**AF**), wenn die Differenz der Glieder $a_{n+1} - a_n = d$ konstant für alle $n \in IN$ ist. $d \in IR \setminus \{0\}$.

Beispiel 1.4

$(a_n) = (2,4,6,8,...)$ ist eine arithmetische Zahlenfolge, weil die Differenz

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n = 2 = d$ konstant für alle $n \in IN$ ist.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ...\right)$ ist keine arithmetische Zahlenfolge. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -0.25 \neq \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -0.083$.

Die Differenz $a_{n+1} - a_n = d$ ist nicht konstant für alle $n \in IN$.

Bemerkungen:

1. Durch das Anfangsglied und die Differenz ist eine AF eindeutig bestimmt.
2. Das n-te Glied lautet: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
3. Eine AF ist rekursiv definiert durch: $a_{n+1} = a_n + d$
4. Bei einer AF ist jedes Glied (ausser dem Anfangsglied) das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Glieder. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Aufgabe 1.1

Berechnen Sie das 12. Glied der AF:

a) $a_1 = 7, d = 0.5$ b) $a_1 = 52, d = -3$ c) $a_3 = 4, d = 2.5$

Aufgabe1.2

Von einer AF sind bekannt:

a) $a_3 = 3, a_7 = 15$ Berechnen Sie a_1 und $a_{10.}$

b) $a_2 = 6, a_9 = 0$ Berechnen Sie a_4 und $a_{15.}$

Aufgabe 1.3

Handelt es sich um eine AF?

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$ b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, ...\right)$ c) $\left(16^{0.5}, 16^{0.25}, 16^{0}, ...\right)$

Aufgabe 1.4
Ein Gut mit dem Anschaffungswert CHF 69'300.- soll in 6 Jahren linear auf CHF 16'200.- abgeschrieben werden. Erstellen Sie einen Abschreibungsplan.

Jahr	Restwert	Abschreibung
0	69'300.-	...
...	...	
6	16'200.-	

Aufgabe 1.5
Die Wärme der Erde stimmt in 25 m Tiefe mit der mittleren Jahrestemperatur des Beobachtungsortes überein. Sie nimmt von hier ab mit 32 m Tiefe um 1 °C zu. Wie hoch müsste bei einer mittleren Jahrestemperatur von 10 °C die Temperatur der Erde in einer Tiefe von a) 345 m, b) 1 km, c) 20 km sein?

1.1.3 Die geometrische Folge

Definition 1.3

Eine Folge heisst **geometrische Zahlenfolge (GF)**, wenn der Quotient der Glieder $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ konstant ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.

Beispiel 1.5
$(a_n) = (1,2,4,8,...)$ ist eine geometrische Folge. Der Quotient
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ist konstant für alle $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.
$(a_n) = (100,50,25,...)$ ist eine geometrische Folge. Der Quotient
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.5$ ist konstant für alle $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.

Bemerkungen:
1. Durch das Anfangsglied und dem Quotienten q ist eine GF eindeutig bestimmt.
2. Eine GF ist rekursiv definiert durch: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ Beweis!
3. Bei einer GF gilt das Bildungsgesetz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ Beweis!
4. Bei einer GF ist jedes Glied (ausser dem Anfangsglied) das geometrische Mittel der beiden benachbarten Glieder. $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Aufgabe 1.6
Von einer GF sind a_1 und q bekannt. Berechnen Sie a_3 und a_{10}:
a) $a_1 = 16$, $q = 0.75$ b) $a_1 = 1$, $q = -2$ c) $a_1 = 3$, $q = 3$

Aufgabe 1.7
Bilden die angegebenen Glieder den Anfang einer GF? Berechnen Sie im zutreffenden Fall a_8.

a) $(1,\quad 1.1,\quad 1.11\quad ,1.111,\quad ...)$ b) $(1,\quad 1.1,\quad 1.21,\quad 1.331,\quad ...)$

c) $(5^{-1}, 5^{-2}, 5^{-3}, ...)$

Aufgabe 1.8
Für eine GF gilt: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Lösen Sie die Gleichung nach n und q auf.

n =	q =

Aufgabe 1.9
Von einer GF sind ein Glied und q bekannt, Berechnen Sie a_1.

a) $a_4 = 729^{-1}, q = 3^{-1}$ b) $a_7 = 256, q = 4$ c) $a_4 = 23, q = -2$

Aufgabe 1.10
Wie viele Glieder der GF (1'000, 999, ...) sind grösser als 1?

Aufgabe 1.11
Von einer GF sind zwei Glieder gegeben. Berechnen Sie a_1 und q.

a) $a_3 = 1/64, a_6 = 1/8$ b) $a_4 = 1, a_6 = 25/9$ c) $a_2 = 36, a_4 = 16$

1.1.4 Unendliche geometrische Folge

Satz 1.1

Die geometrische Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist.

Beispiel 1.6

$(1, 2, 4, 8, ...)$ ist eine GF. $q = 2,\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Diese geometrische Folge divergiert, weil $|q| > 1$ ist.

$(10, -5, 2.5, ...)\ q = -0.5,\ a_n = 10 \cdot (-0.5)^{n-1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} 10 \cdot (-0.5)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} 10 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (-0.5)^{n-1} = 10 \cdot 0 = 0$

Diese geometrische Folge konvergiert, weil $|q| < 1$ ist.

Aufgabe 1.12
Geben Sie je zwei konvergente bzw. divergente unendliche geometrische Folgen an. Bestimmen Sie deren Grenzwerte.

1.2 Reihen

1.2.1 Begriff der Reihe

Definition 1.4

Eine **endliche Reihe** ist ein Ausdruck der Form

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad n \in IN.$$

Beispiel 1.7

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ a_5 = 10,\ a_6 = 12$

$s_6 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$

$$s_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \sum_{i=1}^{6} a_i$$

Bemerkung:

Bei dem Summensymbol Σ (griech. Sigma) ist die Schrittweite 1. (i. A. ist $i \in IN$)

Aufgabe 1.13

a) $\sum_{i=1}^{5} (1+i) =$

b) $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 1) =$

c) $\sum_{i=0}^{5} 2^i =$

d) $\sum_{i=5}^{10} i^2 =$

e) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2^i} =$

f) $\sum_{i=0}^{6} 10^i =$

1.2.2 Die arithmetische Reihe

Wir entwickeln nun eine Formel, die uns erlaubt, die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge zu bilden.

Beispiel 1.8 **„Gauss[1]"**

$(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, ..., 99, 100)$ $s_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} a_i = ?$

Definition 1.5

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-1)\cdot d) = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)\cdot d)$$

heisst arithmetische Reihe (AR).

Satz 1.2

Für die arithmetische Reihe gilt: $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\cdot(2a_1 + (n-1)\cdot d)$ $n \in IN$

Aufgabe 1.14
Berechnen Sie bei der AF die fehlenden Werte:

a_1	d	n	a_n	s_n
7	0.25	16	?	?
- 0.75	- 0.875	?	- 21.75	?
0.5	1	?	?	8
20	?	41	100	?
1	?	5	?	17.5

Aufgabe 1.15
Eine AF beginnt mit 3, endet mit 37 und hat die Summe 400. Wie viele Glieder hat die Folge?

Aufgabe 1.16
Heinz zersägt eine Dachlatte von 4 m Länge in 10 Teile. Dabei ist jeder Teil 6 cm länger als der zuvor abgesägte. Es bleibt kein Reststück übrig. Wie lange ist das erste Stück?

Aufgabe 1.17
Ein Ofen liefert in der ersten Stunde 600 kg geschmolzenes Metall und jede weitere 0.3 kg weniger. Die Selbstkosten je Stunde betragen konstant Fr. 20.--. Die zur

[1] Karl Friederich, Mathematiker und Astrologe, ∗ Braunschweig 30.4. 1777, † Göttingen 23.2. 1855

Erreichung der maximalen Schmelzleistung von 600 kg erforderliche Reparatur kostet Fr. 2'500.--. Nach welcher Zeit muss der Ofen hergerichtet werden, damit die Kosten je kg Schmelze minimal werden?

1.2.3 Die geometrische Reihe

Wir entwickeln nun eine Formel, die uns erlaubt, die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge zu bilden.

Beispiel 1.9

$(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, ..., 256, 512)$

$$s_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 256 + 512 = \sum_{i=1}^{10} a_i = ?$$

Definition 1.6

Die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} \left(= a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^i \right)$$

heisst endliche geometrische Reihe.

Satz 1.3

Für die endliche geometrische Reihe gilt: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad ,q \in IR \setminus \{1\}$

Beweis:

Aufgabe 1.18

Berechnen Sie bei der GF die fehlenden Werte:

a_1	q	n	a_n	s_n
- 2/3	- 0.5	7	?	?
3	1/3	?	1/27	?
1	3	?	?	364
1	?	8	128	?

Aufgabe 1.19

Der Erfinder des Schachspiels soll sich eine Belohnung wählen. Er verlangt, dass man auf das erste Feld des Schachbrettes ein Weizenkorn, auf das zweite zwei, auf das dritte vier Körner usw legen. Versuchen Sie eine Veranschaulichung der Lösung der Aufgabe.

Etwa 20'000 Weizenkörner wiegen 1 kg.

1.2.4 Die unendliche geometrische Reihe

Satz 1.4

Wenn bei einer unendlichen geometrischen Folge $|q| < 1$ ist, dann gilt für die unendliche geometrische Reihe die Summenformel: $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q}$

Beispiel 1.10

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ ist eine unendliche geometrische Folge. q = 0.5 Die Summe aller Folgeglieder (unendliche viele) kann nach obiger Formel berechnet werden.

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$(2,4,8,16,32,\ldots), \quad \text{GF}, \quad q = 2 \geq 1, \quad s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$$

Aufgabe 1.20
Berechnen Sie die Summe:
a) (0.6, 0.06, 0.006, 0.0006, ...)
b) (10, - 5, 2.5, - 1.25, ...)
c) (1, 1.1, 1.11, 1.111, ...)
d) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1024}\right)$
e) (1000, 999, 998.001, ...)

Aufgabe 1.21
Die Summe der ersten vier Glieder einer GF ist 175, die Summe aller übrigen Glieder 81. Berechnen Sie a_1 und a_5.

Aufgabe 1.22
Welches ist der grösste Wert, den der Quotient q einer GF, die mit a_1 = 4 beginnt, annehmen kann, wenn die Summe aller Glieder der Folge 12 nicht überschreiten darf?

Aufgabe 1.23 **Sophisma (Trugschluss) des Zenon**[2]
Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von einem Stadion (etwa 190 m) vor ihm her kriecht. Mit zwölfmal so grosser Geschwindigkeit kommt Achilles an der Stelle an, an der die Schildkröte zu Anfang sich befand. Nun ist aber die

[2] Z. der Ältere,der Eleat, aus Elea, lebte um 490-430 v. Chr. (Zenon , griech. Philosophen)

Schildkröte um 1/12 Station weiter; hat Achilles diese kleine Strecke durchlaufen, dann ist die Schildkröte um 1/144 Stadion weiter usw.
Achilles wird also die Schildkröte nie erreichen, obwohl er sich ihr immer mehr nähert.

2 Abschreibungen

2.1 Übersicht

Beispiel 2.1
Eine Anlage mit dem Anschaffungswert A = 100’000.- CHF soll in N = 8 Jahren auf den Restwert R_8 = 4’000.- CHF abgeschrieben werden.

Abschreibungsplan:

	Abschreibung							
Jahr	Linear		Arithmetisch-degres.		Digital		Geometrisch.-degr.	
n	Abschr.	Restwert	Abschr.	Restwert	Abschr.	Restwert	Abschr.	Restwert
0		100000.00		100000.00		100000.00		100000.00
1	12000.00	88000.00	18000.00	82000.00	21333.33	78666.67	33125.97	66874.03
2	12000.00	76000.00	16285.71	65714.29	18666.67	60000.00	22152.67	44721.36
3	12000.00	64000.00	14571.43	51142.86	16000.00	44000.00	14814.38	29906.98
4	12000.00	52000.00	12857.14	38285.71	13333.33	30666.67	9906.98	20000.00
5	12000.00	40000.00	11142.86	27142.86	10666.67	20000.00	6625.19	13374.81
6	12000.00	28000.00	9428.57	17714.29	8000.00	12000.00	4430.53	8944.27
7	12000.00	16000.00	7714.29	10000.00	5333.33	6666.67	2962.88	5981.40
8	12000.00	4000.00	6000.00	4000.00	2666.67	4000.00	1981.40	4000.00
			a=	18000.00			r=	0.668740
			d=	1714.2857	d=	2666.6667	p=	33.125970

Abbildung 1: Exceltabelle zum Beispiel oben

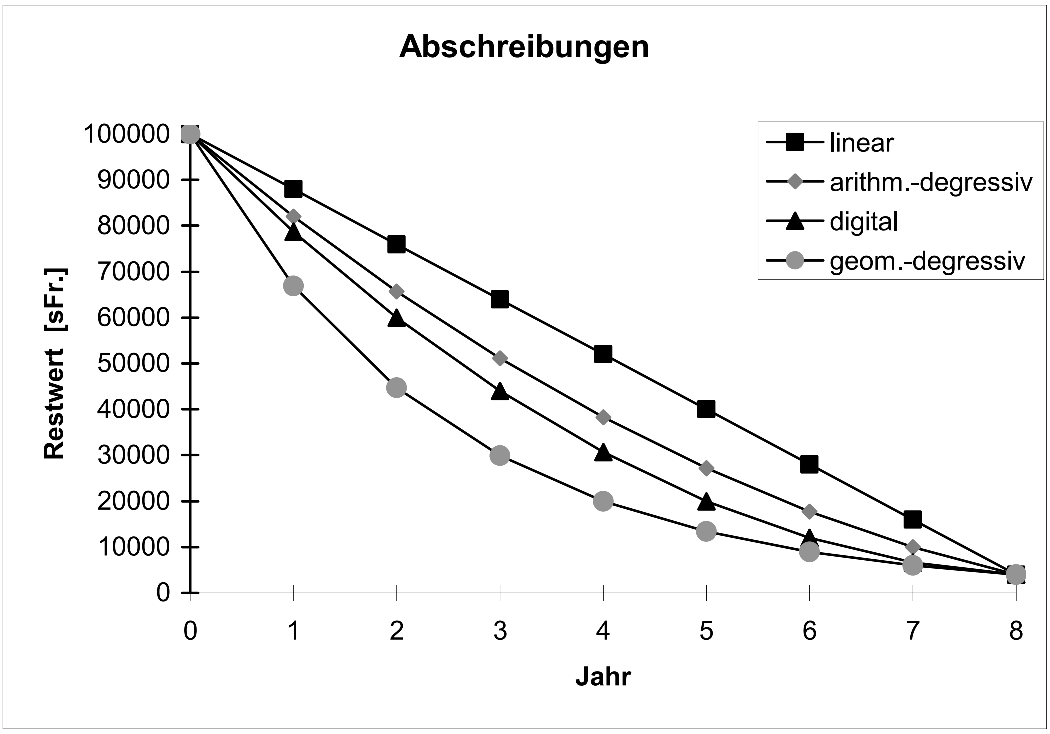


Abbildung 2: Graphen von verschiedenen Abschreibungen mit linearer Interpolation

2.2 Die lineare Abschreibung

Bei der linearen Abschreibung eines Gutes mit der Nutzungsdauer von N Jahren ($N \in IN$), wird der Anschaffungswert A in N gleichen Jahresraten auf den vorgeschriebenen Restwert R_N abgeschrieben.

Bezeichnungen:
A = Anschaffungswert
R_N = Restwert nach N Jahren

Herleitung:

$$\text{Der jährliche Abschreibungsbetrag lautet: } \frac{A - R_N}{N}$$

$$\text{Restwert nach dem 1.Jahr: } R_1 = A - 1 \cdot \frac{A - R_N}{N}$$

$$\text{Restwert nach dem 2.Jahr: } R_{21} = A - 2 \cdot \frac{A - R_N}{N}$$

...

$$\text{Restwert nach dem N. Jahr: } R_N = A - N \cdot \frac{A - R_N}{N} = R_N$$

Satz 2.1

$$\text{Der Restwert nach n Jahren lautet: } R_n = A - n \cdot \frac{A - R_N}{N} \qquad 0 \le n \le N, \quad n \in IN_0$$

Aufgabe 2.1
Eine Maschine mit dem Anschaffungswert von CHF 40’000.- soll in 6 Jahren linear auf CHF 10’000.- abgeschrieben werden.
Erstellen Sie einen Abschreibungsplan.

Abschreibungsplan:

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2.3 Die arithmetisch-degressive Abschreibung

Bei der arithmetisch degressiven Abschreibung sind die einzelnen Abschreibungsbeträge nicht konstant. Sie nehmen um den gleichen Betrag d ab.

Herleitung:

Abschreibung im 1.Jahr : $a = a_1$

Abschreibung im 2.Jahr : $a - d = a_2$

Abschreibung im 3.Jahr : $a - 2 \cdot d = a_3$

...

Abschreibung im n.Jahr : $a - (n-1) \cdot d = a_n$

Die Abschreibungsbeträge bilden somit den Beginn einer fallenden arithmetischen Zahlenfolge.
Damit die Abschreibung in N Jahren vom Anschaffungswert A auf den Restwert R_N erfolgt, muss die Summe aller Abschreibungsbeträge gleich dem gesamten Abschreibungsbetrag $A - R_N$ sein.

$$\begin{aligned}
A - R_N &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N \\
&= a + (a - 1d) + (a - 2d) + \ldots + (a - (N-1)d) \\
&= Na - d \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (N-1)) && \Big| \; AR: a_1 = 1,\ a_{n-1} = N-1,\ s_{n-1} = \ldots \\
A - R_N &= Na - d \cdot \frac{(N-1) \cdot N}{2} && \Big| \; d \text{ separieren} \\
d &= \frac{2(Na - (A - R_N))}{(N-1) \cdot N} \\
d &= \frac{2(Na - (A - R_N))}{(N-1) \cdot N} > 0 \qquad (1) && \Big| \cdot (N-1) \cdot N \Big| \quad \ldots \\
a &> \frac{(A - R_N)}{N} \qquad (2)
\end{aligned}$$

$a > \dfrac{(A - R_N)}{N}$ = Abschreibungsbetrag bei der linearen Abschreibung.

Eine arithmetisch-degressive Abschreibung von A auf R_N in N Jahren ist somit nur dann möglich, wenn der erste Abschreibungsbetrag $a = a_1$ grösser ist als der konstante Betrag bei einer linearen Abschreibung.

Der letzte Abschreibungsbetrag im N-ten Jahr lautet:

$$a_N = a - (N-1)\cdot d \overset{(1)}{=} a - (N-1)\frac{2\cdot(N\cdot a - (A - R_N))}{(N-1)\cdot N}$$

$$a_N = a - 2\cdot\left(\frac{N\cdot a}{N} - \frac{(A-R_N)}{N}\right)$$

$$a_N = -a + 2\cdot\frac{A-R_N}{N}$$

$$a_N = -a + 2\cdot\frac{A-R_N}{N} > 0 \qquad (3)$$

$$a < 2\cdot\frac{A-R_N}{N}$$

$a < 2\cdot\frac{A-R_N}{N}$ = doppelter Abschreibungsbetrag bei der linearen Abschreibung.

Eine arithmetisch-degressive Abschreibung von A auf R_N in N Jahren ist somit nur dann möglich, wenn der erste Abschreibungsbetrag a = a_1 kleiner ist als der doppelte konstante Betrag bei einer linearen Abschreibung.
Da die Folge a_1, a_2, a_3, ..., a_N im Falle d > 0 fallend ist, folgt aus (2) und (3), dass alle N Abschreibungsbeträge positiv sind.

Satz 2.2

Für den n-ten Abschreibungsbetrag bei einer arithmetisch-degressive Abschreibung gilt:

$$a_n = a - (n-1)\cdot d \text{ mit } d = \frac{2(Na - (A-R_N))}{(N-1)N} \quad \text{und} \quad \frac{A-R_N}{N} < a < 2\cdot\frac{A-R_N}{N}, \quad 1 \le n \le N$$

A = Anschaffungswert
R_N = Restwert nach N Jahren
a = a_1 = erster Abschreibungsbetrag
a_n = n-ter Abschreibungsbetrag $1 \le n \le N,\ n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2.2
Eine Maschine mit dem Anschaffungswert CHF 50'000.- soll in 5 Jahren arithmetisch-degressiv auf CHF 10'000.- abgeschrieben werden. Dabei soll im ersten Jahr CHF 15'000.- abgeschrieben werden. Wegen $\frac{A-R_5}{5}$ = 8'000.- CHF ist die Bedingung aus Satz oben erfüllt: 8'000.- < a = 15'000.- < 16'000.- .

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		
1		
2		
3		
4		
5		

2.4 Die digitale Abschreibung

Die digitale Abschreibung ist ein Spezialfall der arithmetisch-degressiven Abschreibung mit
$a_N = d$. Der letzte Abschreibungsbetrag stimmt also mit dem Abschreibungsgefälle d überein.

Herleitung:
Da die Abschreibungsbeträge arithmetisch fallend sind, erhält man:
$a_N = d,\ a_{N-1} = 2d,\ a_{N-2} = 3d,\ \ldots,\ a_1 = a = N \cdot d$
In N Jahren wird der Gesamtbetrag A - R_N abgeschrieben. Damit gilt:

$$A - R_N = d + 2d + 3d + \ldots Nd = d \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + N) \quad \Big| \text{ AR}$$

$$A - R_N = d \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

$$d = \frac{2 \cdot (A - R_N)}{N \cdot (N+1)}$$

Satz 2.3

Für die Abschreibungsbeiträge bei einer digitalen Abschreibung gilt:

$$a_1 = N \cdot d,\ a_2 = (N-1) \cdot d,\ a_3 = (N-2) \cdot d,\ \ldots,\ a_N = d \text{ mit } d = \frac{2 \cdot (A - R_N)}{N \cdot (N+1)}$$

A = Anschaffungswert
R_N = Restwert nach N Jahren
a_N = d ist der letzte Abschreibungsbetrag

Aufgabe 2.3
Ein Gut mit dem Anschaffungswert von CHF 17'000.- soll in 9 Jahren digital auf CHF 1'250.- abgeschrieben werden.
Erstellen Sie einen Abschreibungsplan.
Abschreibungsplan:

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

2.5 Die geometrisch-degressive Abschreibung

Bei der geometrisch-degressiven Abschreibung wird in jedem Jahr p % vom jeweiligen Restwert aus dem Vorjahr abgeschrieben. Dabei ist p während der gesamten Laufzeit konstant.

Herleitung:

$$\text{Restwert nach dem 1. Jahr:} \quad R_1 = A - A \cdot \frac{p}{100} = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

$$\text{Restwert nach dem 2. Jahr:} \quad R_2 = R_1 - R_1 \cdot \frac{p}{100} = R_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

$$\text{Restwert nach dem 3. Jahr:} \quad R_3 = R_2 - R_2 \cdot \frac{p}{100} = R_2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^3$$

...

Satz 2.4

Für den Restwert nach n Jahren bei einer geometrisch-degressiven Abschreibung gilt:

$$\text{Restwert nach n Jahren:} \quad R_n = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \qquad \text{für } n = 1,2,3,...,N$$

A = Anschaffungswert
R_n = Restwert nach n Jahren
p = jährlicher prozentualer Abschreibungssatz vom jeweiligen Restwert

Aufgabe 2.4
Ein Gut werde in N Jahren geometrisch-degressiv auf R_N abgeschrieben. Lösen Sie die Gleichung $R_N = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^N$ nach der Laufzeit N und dem prozentualen Abschreibungssatz p auf.

N =	p =

Aufgabe 2.5
Eine Maschine mit dem Anschaffungswert CHF 90’000.- soll geometrisch degressiv in 10 Jahren auf den Restwert CHF 20’000.- abgeschrieben werden.
Erstellen Sie einen Abschreibungsplan.

2.6 Abschreibungen mit Excel

Betrachten wir nochmals unser Einführungsbeispiel.
Eine Anlage mit dem Anschaffungswert A = 100'000.- CHF soll in N = 8 Jahren auf den Restwert R_8 = 4'000.- CHF abgeschrieben werden.

Excel liefert mit Einschränkungen für einige Abschreibungsarten die **Abschreibungsbeträge**.

	A	B	C	D
1		Linear	Digital	Geometrisch-degressiv
2	Jahr	LIA(100000;4000;8)	DIA(100000;4000;8;A3)	GDA2(100000;4000;8;A3;12)
3	1	Fr. 12'000.00	Fr. 21'333.33	Fr. 33'100.00
4	2	Fr. 12'000.00	Fr. 18'666.67	Fr. 22'143.90
5	3	Fr. 12'000.00	Fr. 16'000.00	Fr. 14'814.27
6	4	Fr. 12'000.00	Fr. 13'333.33	Fr. 9'910.75
7	5	Fr. 12'000.00	Fr. 10'666.67	Fr. 6'630.29
8	6	Fr. 12'000.00	Fr. 8'000.00	Fr. 4'435.66
9	7	Fr. 12'000.00	Fr. 5'333.33	Fr. 2'967.46
10	8	Fr. 12'000.00	Fr. 2'666.67	Fr. 1'985.23

Excel rundet p auf drei Stellen:
p = 33.1 bzw. p = 0.331

3 Rentenmathematik

3.1 Einmalige Einzahlung mit Zinseszins

3.1.1 Einmalige Einzahlung mit Verzinsung zum Jahresende

Jeweils zum Jahresende werde der gesamte Kontostand einschliesslich der angefallenen Zinsen mit p % verzinst.

Zinseszinsformel:

Kontostand nach dem n. Jahr : $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 r^n$

K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
p = nomineller Jahreszinsfuss per annum (p. a.)
n = Laufzeit in Jahren
r $= 1 + \frac{p}{100}$ = Aufzinsungsfaktor

Aufgabe 3.1
Lösen Sie die Zinseszinsformel nach jedem Parameter auf.
Ergebnis:

Aufgabe 3.2
Auf welchen Betrag wachsen sFr.5'000.-- während 10 Jahren bei einer jährlichen Verzinsung mit p = 7% an?

Aufgabe 3.3
In welcher Zeit wächst ein Kapital von sFr. 1'000.-- auf sFr. 2029.05 an bei einem Zinsfuss von 4.25%?

3.1.2 Einmalige Einzahlung mit unterjähriger Verzinsung

3.1.2.1 Einmalige Einzahlung, jährliche Verzinsung

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
n = LaufzeitinJahren
p = Jahreszinssatz

K_0	K_1	K_2	Kapital nach n Jahren
0	1	2	Jahre
	1.	2.	Verzinsung mit p

Beispiel 3.1

Gegeben: $K_0 = 100.-$, $p = 6$, $n = 2$ Gesucht: $K_2 =$

3.1.2.2 Einmalige Einzahlung, unterjährige Verzinsung

Bei der unterjährigen Verzinsung wird das Jahr in m gleichlange Zinsperioden eingeteilt. Nach jeder der m Zinsperioden wird auf das Gesamtkapital einschliesslich inzwischen angefallener Zinsen anteilmässig p/m % Zinsen gutgeschrieben. p/m ist der sog. **relative Zinssatz** des **nominellen Jahreszinssatz** p.

$$K_n = K_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m\right)^n$$

K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
n = Laufzeit in Jahren
p = nomineller Jahreszinsfuss
m = Anzahl Zinsperioden pro Jahr mit jeweils p/m % Zinsen

K_0				K_1				K_2	Kapital nach n Jahren
0				1				2	Jahr
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Verzinsung mit p/m

In der obigen Abbildung ist m = 4

Beispiel 3.2

Gegeben: $K_0 = 100.-$, $p = 6$, $n = 2$, $m = 4$

Gesucht: $K_2 =$

Der Jahreszinssatz, der bei einmaliger Verzinsung zum gleichen Endkapital führt, wie die m-malige unterjährige Verzinsung mit jeweils p/m %, heisst der **effektive Jahreszinssatz**. Er wird mit $p_{eff} = p'$ bezeichnet.

Indem wir die entsprechenden Kontobestände nach einem Jahr gleichsetzen, kann man p_{eff} berechnen.

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{eff}}{100}\right)^1 = K_1$$

$$p_{eff} = p' = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{100} \cdot \frac{p}{m}\right)^m - 1\right)$$

Beispiel 3.3

Gegeben: $K_0 = 100.-$, $p = 6$, $n = 1$, $m = 4$

Gesucht: $p_{eff} =$

Umgekehrt lässt sich aus einem vorgegebenen effektiven Jahreszinssatz p_{eff} der nominelle Jahreszinssatz p und daraus der pro Zinsperiode zu zahlende Zinssatz p/m berechnen. Dieser Zinssatz p/m heisst der **konforme Zinssatz**.

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{eff}}{100}\right)^1 = K_1$$

$$\frac{p}{m} = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{p_{eff}}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

$$p = 100 \cdot m \cdot \left(\left(1 + \frac{p_{eff}}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

Beispiel 3.4

Gegeben: $p_{eff} = 6$, $m = 4$

Gesucht: $\frac{p}{m} =$

Aufgabe 3.4
Ein Kapital werde vierteljährig mit jeweils $p/m = 1$ % verzinst. Berechnen Sie den zugehörigren effektiven Jahreszinssatz.

Aufgabe 3.5
Ein Kapital werde monatlich mit Zinseszinsen verzinst. Gesucht ist der zu einem effektiven Jahreszinssatz von 6 % zugehörige monatliche konforme Zinssatz.

Aufgabe 3.6
Ein Kapital von CHF 50'000.- werde zum nominellen Jahreszinssatz von 6 % angelegt. Gesucht ist der Kontostand nach 10 Jahren, falls die Zinsen mit Zinseszins anteilmässig gezahlt werden

a) nach einem Jahr,
b) halbjährlich,
c) vierteljährlich,
d) monatlich,
e) wöchentlich,
f) täglich (1 Jahr entspricht 365 Tage)

3.1.2.3 Stetige Verzinsung

Bei einer stetigen Verzinsung wird der Zins augenblicklich zum Kapital geschlagen. Es gelten folgende Grenzwertsätze:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e^1 = 2.71828182... \qquad \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m} \cdot \frac{1}{100}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{m}\right)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{m}\right)^m$$

$$K_1 = \lim_{m \to \infty} \left(K_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{100}}{m}\right)^m \right) = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}}$$

Bei einer stetigen Verzinsung erhalten wir mit dem nominellen Jahreszinsfuss p (p.a.) ein Kapital $K_1 = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}}$ nach einem Jahr.

Beispiel 3.5
Mit K_0 = 100.- sFr. und p = 8 p.a. erhalten wir nach einen Jahr
$K_1 = 100 \cdot 1.08 = 108.-$ sFr.
Wenn wir wie oben den Zins augenblicklich zum Kapital schlagen erhalten wir
$K_1 = 100 \cdot e^{0.08} = 108.3287$ sFr.
Nun möchten wir mit einer stetigen Verzinsung r nicht mehr 108.32 sFr. sondern nur noch 108.- sFr. erhalten. Nach obiger Formel setzten wir ein:

$K_1 = K_o \cdot e^r$

$108 = 100 \cdot e^r$

$r = \ln(108/100) = 0.076961 = 7.6961\%$

Diesen Zinssatz r nennen wir stetig.

Definition 3.1

Stetiger Zinssatz r = $\ln\left(K_1 / K_0\right)$

Aufgabe 3.7

a) Gegeben: K_0 = 100, K_1 = 120 Gesucht: p = ..., r = ...

b) Gegeben: K_0 = 100, r = 10 % Gesucht: K_1 = ..., p = ...

3.1.2.4 Diskrete Renditen - stetige Renditen

Beispiel 3.6

P_t = 100.- sFr. P_T = 1000.- sFr.

Diskrete Rendite $R = \dfrac{1000 - 100}{100} = 9 = 900\%$

Stetige Rendite $r = \ln(\left(1000/100\right) = 2.3026 = 230.26\%$

Beispiel 3.7

P_t = 100.- sFr. P_T = 0.05 sFr.

Diskrete Rendite $R = \dfrac{0.05 - 100}{100} = -0.9995 = -99.95\%$

Stetige Rendite $r = \ln(\left(0.05/100\right) = -7.6009 = -760.09\%$

Anhand der beiden Beispiele erkennen wir

$-100\ \% \leq R < \infty\ \%$

$-\infty\ \% < r < \infty\ \%$

$r \leq R$

Stetige Renditen sind näherungsweise normalverteilt, diskrete Renditen nicht.

Zwischen stetiger und diskreter Rendite besteht folgende Äquivalenz

$$R = e^r - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \ln(1 + R)$$

Aufgabe 3.8

a) R=20% r=...
b) R=-10% r=...
c) r=15% p.a. R=...
d) r=-0.12 R=...
e) R=20% p.a. $\overline{R}$ =... pro Monat
f) R=-15% p.a. $\overline{R}$ =... pro Monat
g) SMI am 1.1.2007: 8785.7 Punkte
   SMI am 1.1.2008: 8484.4 Punkte
   R = ... , r = ...
h) Nestlé am 1.1.2007: 433.0 sFr.
   Nestlé am 1.1.2008: 520.0 sFr.
   R = ... , r = ...

3.1.2.5 Shortfall-Risk

Unter Shortfall-Risk (Ausfallrisiko) versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine vorgegebene Mindestrendite (Threshold Return) verfehlt wird.

Beispiel 3.8
Zeitreihe des Pictet-Rätzer Aktienindex von 1925 – 2001:
Erwartungswert μ = 7.9%, Standardabweichung σ = 18.8%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der jährliche Verlust mehr als r = 10% ?

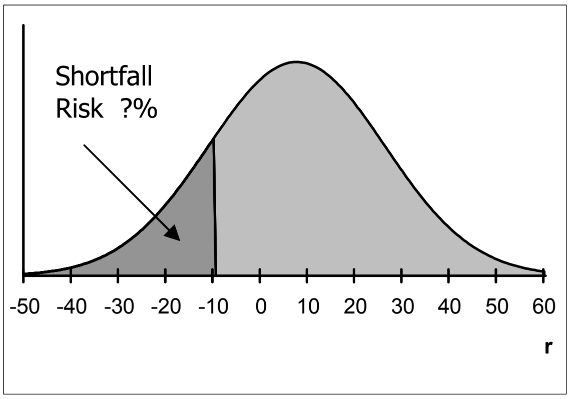


Abbildung 3: Shortfall Risk in einer Standardnormalverteilung NV(0, 1) und einer Normalverteilung NV(0.079, 0.188)

Berechnung:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 17.05% wird die Mindestrendite von - 10% unterschritten. Die Rendite von - 10% wird also in rund jedem 6ten Jahr verfehlt.

Aufgabe 3.9
Zeitreihe des Pictet-Rätzer Bondindex von 1925 – 2006:
Erwartungswert μ = 4.4 %, Standardabweichung σ = 3.5 %.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die jährliche Rendite weiniger als r = 1% ?

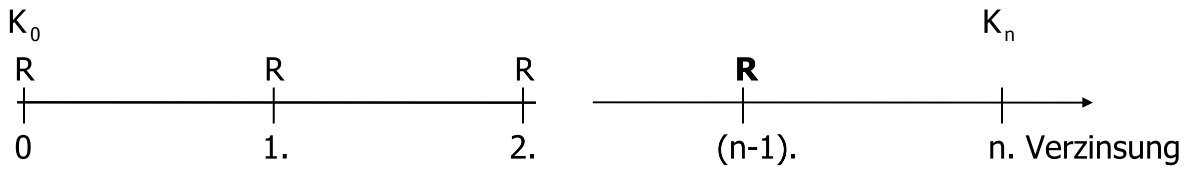
3.2 Regelmässige Einzahlungen mit Zinseszins

Während im Kapitel vorhin eine einmalige Einzahlung erfolgte, soll in diesem Kapitel regelmässige Zahlungen in gleichen Zeitabständen untersucht werden.
Wir behandeln zwei Modelle.
Im ersten Abschnitt finden die Zahlungen (Ein-, Aus-) jeweils am Anfang oder Ende eines Zinsintervalls (Jahres) statt, also zu Zeitpunkten, bei denen das Kapital verzinst wird.
Im zweiten Abschnitt werden während eines Zinsintervalls (Jahres) Zahlungen (Ein-, Aus-) in regelmässigen Abständen vorgenommen (unterjährige oder unterzinsterminliche Zahlungen).
Falls die Einzahlungen am Anfang der entsprechenden Zeitabschnitte vorgenommen werden, spricht man von **vorschüssiger** Einzahlung. **Nachschüssige** Einzahlungen finden statt, falls die Einzahlungen am Ende der entsprechenden Zeitabschnitte erfolgen.

3.2.1 Ein- oder Auszahlungen zu den Zinsterminen

Während **n** Jahren - oder **n** Zinsintervallen - werden entweder zu Beginn (vorschüssig) oder am Ende (nachschüssig) **n** konstante Zahlungen (Ein- oder Auszahlung) gemacht.

3.2.1.1 Vorschüssige Ein- oder Auszahlungen R zu den Zinsterminen



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate

Abbildung 4: Darstellung der vorschüssigen Ein- oder Auszahlungen R zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.1

Kontostand nach n Verzinsungen bei n vorschüssigen Zahlungen zu den Zinsterminen:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad \text{"+"Sparerformel,} \quad \text{"–"Rentenformel, } n \in \mathbb{N}$$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R = Ein- oder Auszahlung zu Beginn eines Zinsintervalls
r $= 1 + \frac{p}{100}$

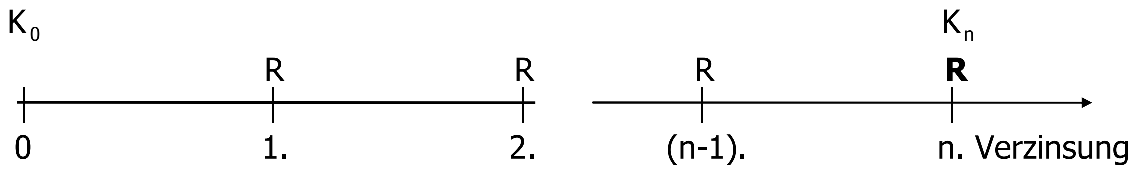
Aufgabe 3.10
Beweisen Sie Satz oben

Aufgabe 3.11
Lösen Sie die Gleichung $K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ nach R und n auf.

R =	n =

Aufgabe 3.12
Die Eltern von Karin zahlen mit der Geburt ihrer Tochter jährlich vorschüssig CHF 2'000.- auf ein Jugendsparheft ein. Das Kapital werde jährlich mit 4.5 % verzinst. Über welches Endkapital verfügt sie mit dem vollendeten 20sten Altersjahr?

3.2.1.2 Nachschüssige Ein- oder Auszahlungen R zu den Zinsterminen



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate

Abbildung 5: Darstellung der nachschüssigen Ein- oder Auszahlungen R zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.2

Kontostand nach n Verzinsungen bei n nachschüssigen Zahlungen zu den Zinsterminen:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad \text{"+"Sparerformel,} \quad \text{"–"Rentenformel,} \quad n \in \mathbb{N}$$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R = Ein- oder Auszahlung zu Beginn eines Zinsintervalls
r = $1 + \frac{p}{100}$

Aufgabe 3.13
Beweisen Sie Satz oben

Aufgabe 3.14

Lösen Sie die Gleichung $K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ nach R und n auf.

R =	n =

Aufgabe 3.15
Familie Meier möchte nach 15 Jahren CHF 150'000.- auf ihrem Konto der dritten Säule zur Verfügung haben. Wie hoch ist die jährlich nachschüssige Rate R, die sie einzahlen muss, um dieses Sparkapital zu erreichen? Jährliche Verzinsung mit 4 %.

Es folgen einige vermischte Aufgaben.

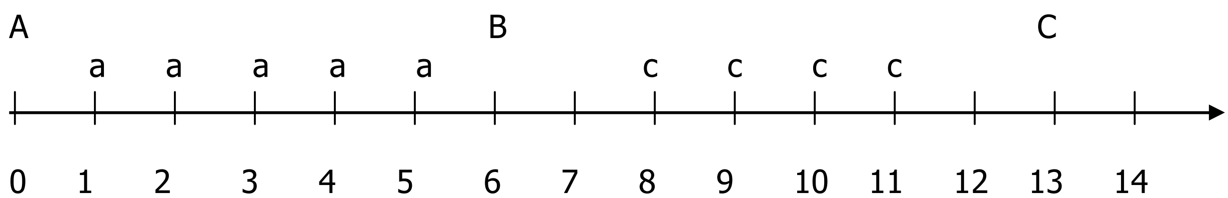
Aufgabe 3.16
Jemand erbt CHF 100’000.- und legt den Betrag mit Zinseszinsen an. p = 5.
a) Wie viel Geld wird er nach Abschluss eines 5jährigen Studiums noch haben, wenn er jährlich CHF 20’000.- vorschüssig zum Leben benötigt?
b) Wie viel Geld kann er jährlich vorschüssig abheben, wenn er am Schluss nichts übrig lassen möchte?
c) Wie lange kann er studieren, wenn er nur CHF 12’000.- vorschüssig pro Jahr benötigt?
d) Wie viel Erbe benötigt er, um ein 7jähriges Studium zu finanzieren, wenn er CHF 20’000.- vorschüssig benötigt.
e) Wie viel Zins muss er verlangen, damit er während seines 5jährigen Studiums jährlich vorschüssig CHF 24’000.- ausgeben kann?

Aufgabe 3.17
Berechnen Sie den Barwert einer vorschüssigen Rente von jährlich CHF 15’000.- und einer Dauer von 10 Jahren. p = 7.5

Aufgabe 3.18
Sie haben in 5 Jahren eine Schuld zu amortisieren, indem Sie am Ende eines jeden Jahres CHF 1’200.- bezahlen. Wie gross wäre die entsprechende Jahresamortisation, wenn Sie die gleiche Schuld in 2 Jahren begleichen? p = 5.

Aufgabe 3.19
Familie Huber schliesst einen Bausparvertrag über CHF 500’000.- ab. Bis zur geplanten Zuteilung in 8 Jahren muss der Kontostand mindestens 30 % der Bausparsumme betragen. Wie viel muss sie jeweils zum Jahresbeginn bei p = 5 einzahlen?

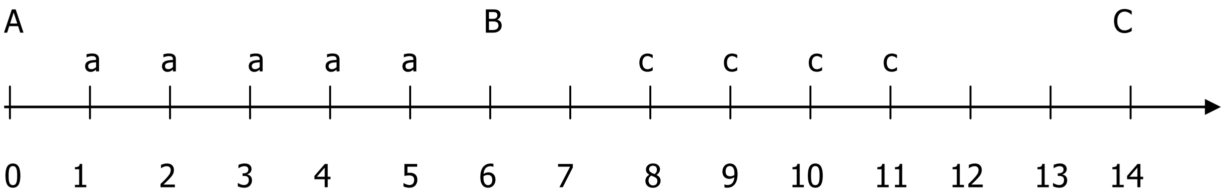
Aufgabe 3.20



Verzinsungen

Verzinsung mit p = 5
Einzahlungen: A = 5’000.--, B = 6’000.--, a = 1’000.--
Auszahlungen: c = 2’500.--. Wie hoch ist die Auszahlung C, so dass der Endwert aller Ein- und Auszahlungen $K_{14} = $ 0.-- CHF beträgt?

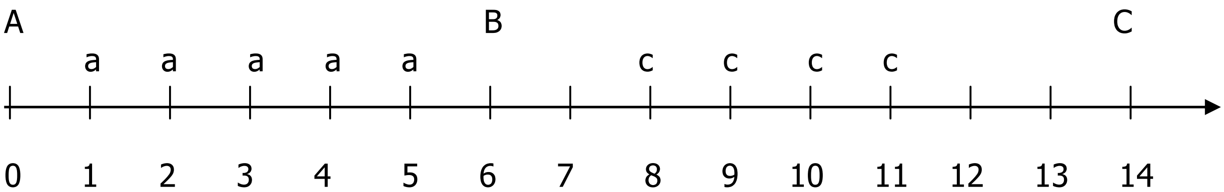
Aufgabe 3.21



Verzinsung

Verzinsung mit p = 5
Einzahlungen: A = 5’000.--, B = 6’000.--, a = 1’000.--
Auszahlungen: c = 2’500.--. Wie hoch ist die Auszahlung C, so dass der Barwert aller Ein- und Auszahlungen CHF 3’000.-- beträgt?

Aufgabe 3.22



Verzinsung

Verzinsung mit p = 5
Einzahlungen: A = 1’000.--, B = 2’000.--, a = 500.-- Auszahlungen: C = 2’500.-
Wie hoch sind die Auszahlungen c, so dass nach 14 Verzinsungen der Endwert gleich 0.-- ist?

3.2.1.3 Vorschüssige und nachschüssige Ein- oder Auszahlungen R zu den Zinsterminen mit Excel

Beispiel 3.9

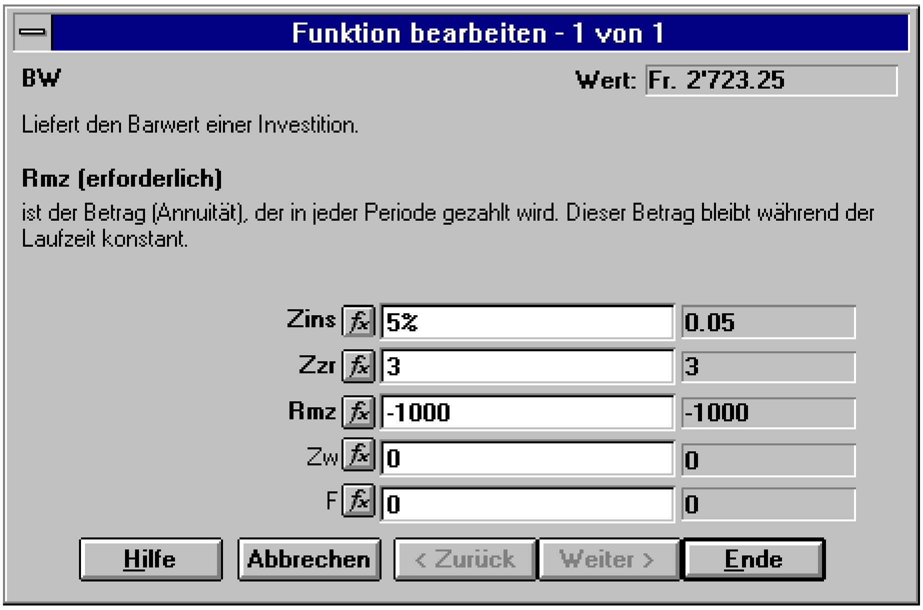
B_0 = BW = 2'723.25

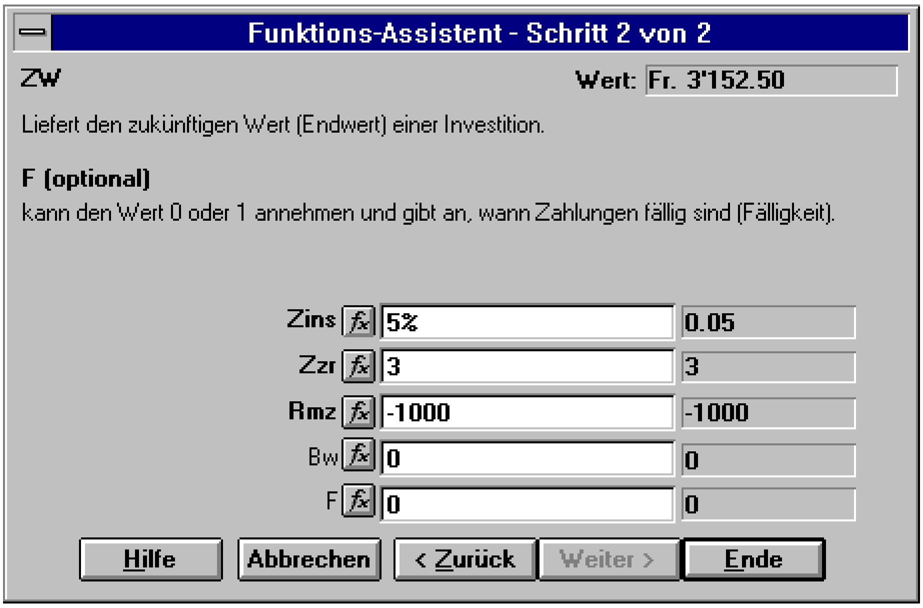
K_3 = ZW = 3'152.50

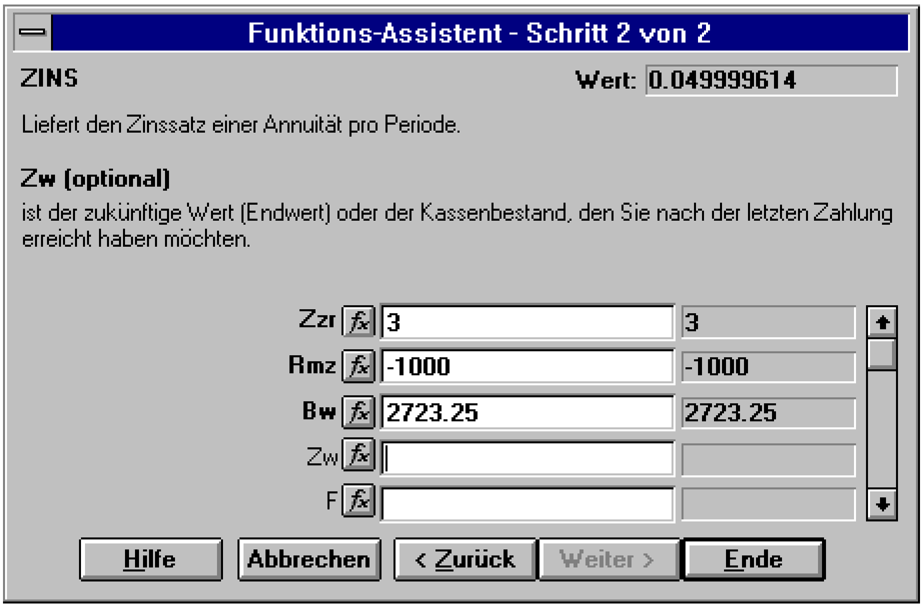
p = Zins = 5

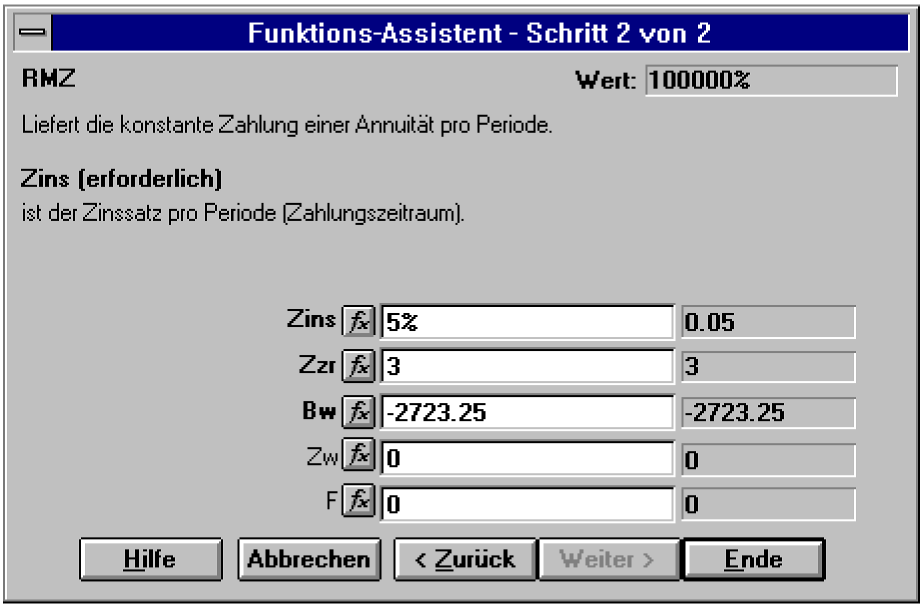
R = RMZ = 1'000.–

Sie können nun jeden der 4 Parameter als unbekannt wählen. Die übrigen drei müssen dann natürlich bekannt sein.




Funktions-Assistent - Schritt 2 von 2
ZW
Wert: Fr. 3'152.50
Liefert den zukünftigen Wert (Endwert) einer Investition.
F (optional)
kann den Wert 0 oder 1 annehmen und gibt an, wann Zahlungen fällig sind (Fälligkeit).
Zins 5% 0.05
Zzr 3 3
Rmz -1000 -1000
Bw 0 0
F 0 0
Hilfe
Abbrechen
< Zurück
Weiter >
Ende

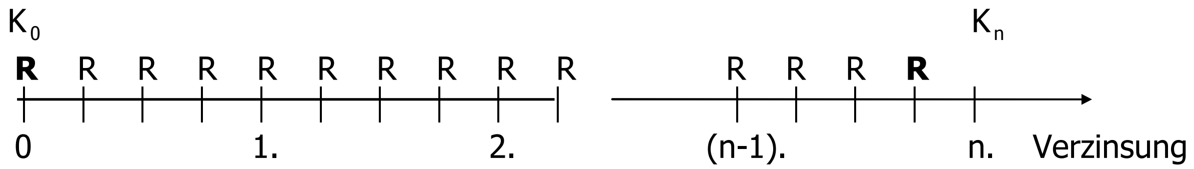

Funktions-Assistent - Schritt 2 von 2
ZINS
Wert: 0.049999614
Liefert den Zinssatz einer Annuität pro Periode.
Zw (optional)
ist der zukünftige Wert (Endwert) oder der Kassenbestand, den Sie nach der letzten Zahlung erreicht haben möchten.
Zzr 3 3
Rmz -1000 -1000
Bw 2723.25 2723.25
Zw
F
Hilfe
Abbrechen
< Zurück
Weiter >
Ende


Funktions-Assistent - Schritt 2 von 2
RMZ
Wert: 100000%
Liefert die konstante Zahlung einer Annuität pro Periode.
Zins (erforderlich)
ist der Zinssatz pro Periode (Zahlungszeitraum).
Zins 5% 0.05
Zzr 3 3
Bw -2723.25 -2723.25
Zw 0 0
F 0 0
Hilfe
Abbrechen
< Zurück
Weiter >
Ende

3.2.2 Unterzinsterminliche Ein- oder Auszahlungen

Jedes Jahr (Zinsintervall) werde in m gleiche Teilintervalle zerlegt. In jedem dieser Teilintervalle werde zu Beginn (vorschüssig) bzw. am Ende (nachschüssig) der gleiche Betrag R ein- oder ausbezahlt.

3.2.2.1 Vorschüssige unterzinsterminliche Ein- oder Auszahlung



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
m = 4 im Zeitstrahl

Abbildung 6: Darstellung der m unterzinsterminlichen vorschüssigen Ein- oder Auszahlungen pro Zinstermin auf dem Zeitstrahl

Satz 3.3

Kontostand nach n Verzinsungen bei m unterzinsterminlichen vorschüssigen Zahlungen R:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \left(m + \frac{(m+1) \cdot p}{200} \right) \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

"+"Sparerformel, "−"Rentenformel, $n, m \in \mathrm{IN}$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital ($K_0 = 0$ ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
m = Anzahl der äquidistanten unterzinsterminlichen Zahlungen pro Zinsintervall
R = vorschüssige Ein- oder Auszahlung
r $= 1 + \frac{p}{100}$

Aufgabe 3.23
Beweisen Sie den Satz oben und lösen Sie die Gleichung nach folgenden Parametern auf:

R = n =

Aufgabe 3.24
Peter S bezieht während 3 Jahren eine monatlich vorschüssige Rente von CHF 5'670.- Berechnen Sie den Barwert der Rente. Jährliche Verzinsung mit 4 %.

Aufgabe 3.25
Eine Familie zahlt auf das Konto ihrer Tochter 10 Jahre lang jährlich vorschüssig jeweils CHF 3'000.- ein. Das Kapital werde jeweils zum Jahresende mit 5 % verzinst. Welchen Betrag kann die Tochter nach 10 Jahren während ihres 5jährigen Studiums monatlich vorschüssig abheben, damit das Guthaben nach 5 Jahren aufgebraucht ist?

Die ewige Rente

Zu jedem Zinstermin wird die gesamte Zinsgutschrift zur Rentenzahlung benutzt. Wegen $K_n = K_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann die Rente beliebig lange gezahlt werden, ohne dass das Kapital K_0 kleiner wird. Man spricht in diesem Fall von einer ewigen Rente.

Satz 3.4

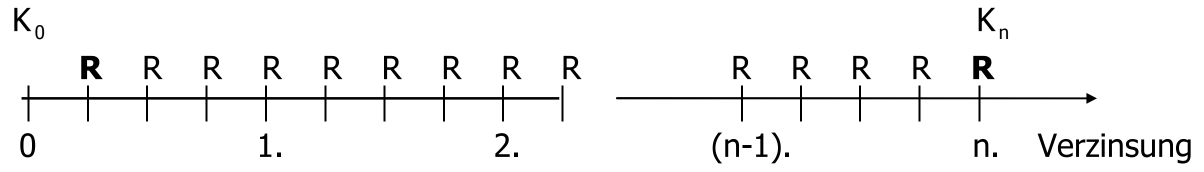
Unterjährige ewige vorschüssige Rente R aus dem Kapital K_0 bei jährlicher Verzinsung: $R = \frac{K_0 \cdot 2 \cdot p}{200 \cdot m + p \cdot (m+1)}$

K_0 = Anfangskapital
p = Zinssatz pro Zinsintervall
m = Anzahl der äquidistanten unterzinsterminlichen Zahlungen pro Zinsintervall
R = vorschüssige ewige unterzinsterminliche Rente
r $= 1 + \frac{p}{100}$

Aufgabe 3.26
Jemand zahlt 20 Jahre monatlich vorschüssig CHF 1'000.- auf ein Konto ein. Welche ewige monatliche vorschüssige Rente kann er nach diesem Zeitraum aus dem angesammelten Kapital bei einem Jahreszinssatz von 6 % erhalten?

Aufgabe 3.27
Lösen Sie die Gleichung $R = \frac{K_0 \cdot 2 \cdot p}{200 \cdot m + p \cdot (m+1)}$ nach K_0 und p auf.

3.2.2.2 Nachschüssige unterzinsterminliche Ein- oder Auszahlung



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
m = 4 im Zeitstrahl

Abbildung 7: Darstellung der m unterzinsterminlichen nachschüssigen Ein- oder Auszahlungen pro Zinstermin auf dem Zeitstrahl

Satz 3.5

Kontostand nach n Verzinsungen bei m unterzinsterminlichen nachschüssigen Zahlungen R:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \left(m + \frac{(m-1) \cdot p}{200} \right) \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

"$+$"Sparerformel, "$-$"Rentenformel, $n, m \in \mathbb{N}$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
m = Anzahl der äquidistanten unterzinsterminlichen Zahlungen pro Zinsintervall
R = nachschüssige Ein- oder Auszahlung
r $= 1 + \dfrac{p}{100}$

Aufgabe 3.28
Beweisen Sie den oben und lösen Sie die Gleichung nach R und n auf.

R =	n =

Aufgabe 3.29
Sie zahlen während 10 Jahren monatlich nachschüssig CHF 550.- auf ein Vorsorgekonto ein. Jährliche Verzinsung mit 4.25 %.

a) Berechnen Sie den Endwert.
b) Sie legen zusätzlich zu Beginn noch CHF 6'000.- auf das Konto. Berechnen Sie nun den Endwert.

Die ewige Rente

Zu jedem Zinstermin wird die gesamte Zinsgutschrift zur Rentenzahlung benutzt. Wegen $K_n = K_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann die Rente beliebig lange gezahlt werden, ohne dass das Kapital K_0 kleiner wird. Man spricht in diesem Fall von einer ewigen Rente.

Satz 3.6

Unterjährige ewige nachschüssige Rente R aus dem Kapital K_0 bei jährlicher Verzinsung: $R = \dfrac{K_0 \cdot 2 \cdot p}{200 \cdot m + p \cdot (m-1)}$

K_0 = Anfangskapital
p = Zinssatz pro Zinsintervall
m = Anzahl der äquidistanten unterzinsterminlichen Zahlungen pro Zinsintervall
R = nachschüssige ewige unterzinsterminliche Rente
r = $1 + \dfrac{p}{100}$

Aufgabe 3.30

Lösen Sie die Gleichung $R = \dfrac{K_0 \cdot 2 \cdot p}{200 \cdot m + p \cdot (m-1)}$ nach K_0 und p auf.

Aufgabe 3.31

Welchen Betrag müssten Sie monatlich nachschüssig während 20 Jahren einzahlen, um danach eine ewige monatlich nachschüssige Rente von CHF 2'000.- zu erhalten? p = 4.

Es folgen einige vermischte Aufgaben.

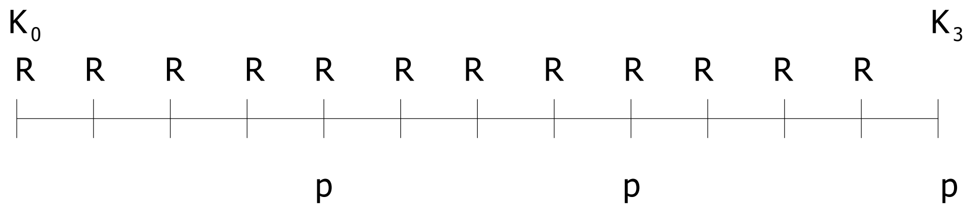
Aufgabe 3.32
Herr Klug hat CHF 50’000.- angelegt, wobei er monatlich nachschüssig 0.5 % Zins gutgeschrieben bekommt. An jedem Monatsende möchte er als Rente CHF 1’000.- abheben. Bestimmen Sie die Anzahl der Monate, während denen er CHF 1’000.- abheben kann. Wie hoch ist die letzte Abhebung (< 1’000.-)?

Aufgabe 3.33
Jemand möchte zwei Leasingverträge prüfen:
A: Anzahlung CHF 7’000.- plus monatliche Raten zu CHF 240.- vorschüssig. Dauer: 48 M.
B: Keine Anzahlung. Monatliche Rate CHF 490.- vorschüssig. Dauer: 48 M.
Welches Angebot ist günstiger? Jährliche Zinsgutschrift. p = 5.

Aufgabe 3.34
Ein Landwirt verkauft an eine Firma ein Grundstück im Wert von CHF 100’000.-. Die Zinsen seien 9 % (Zinsgutschrift zum Jahresende p.a.) Dafür erhält er eine monatlich vorschüssige Rente von CHF 1’000.-.
a) Wie viele volle Jahre erhält er die Rente?
b) Welchen Betrag muss er nach Ablauf dieser Jahre als Ausgleichszahlung noch erhalten?
c) Welche monatlich vorschüssige Rente müsste er bei genau 20jähriger Laufzeit erhalten?

3.2.2.3 Vor- und nachschüssige unterzinsterminliche Ein- oder Auszahlungen R mit Excel

Beispiel 3.10



$R = 1000.-$

$p = 5$

$K_3 = 13'004.05$

$K_0 = 0.-$

	A	B
1		
2		
3	R=	1000
4	K_0 =	0
5	K_n =	13004.0625
6	n=	3
7	vorschüssig=1, nachschüssig= - 1	1
8	m=	4
9	p= (p $\neq$ 0, Division durch 0 nicht def.)	1
10	Sparerformel=1, Rentenformel=0	1
11		
12		
13	Solver	f(x)=0
14		1.0122E-06

Wir suchen mit „Extras" und „Zielwertsuche" den Zinsfuss

=WENN(B10=1;B5-B4*(1+B9/100)^B6-B3*(B8+(B8+B7)*B9/200) * ((1+B9/100)^B6-1) / ((1+B9/100)-1);B5-B4*(1+B9/100)^B6+B3*(B8+(B8+B7) * B9/200)*((1+B9/100)^B6-1)/((1+B9/100)-1))

Aufgabe 3.35
Herr Huber legt sein Geld bei einer kapitalbildenden Lebensversicherung (Säule 3b) an. Er kann das Ersparte (ab dem 60. Lebensjahr) samt Zins, Zinseszins und Überschussbeteiligung durch eine Einmalauszahlung abholen und muss für den Ertrag keine Steuern zahlen. Anfängliche Einmaleinlage Fr. 10'000.--, monatlich nachschüssig zahlbare Prämie CHF 500.-, Laufzeit 5 Jahre, Rendite p = 4.

a) Berechnen Sie die Einmalauszahlung K_5.
b) Wie viele Zinsen erhält Herr Huber während den 5 Jahren insgesamt?
c) Wie hoch ist die Steuerersparnis (gegenüber Alterssparheft mit p = 4), wenn er auf seinem Ertrag (Z) 20 % Steuern entrichten müsste?

Aufgabe 3.36
Eine Familie legt für das dreijährige Studium ihre Tochter während den ersten 5 Jahren (bis Ende 2000) jährlich nachschüssig CHF 1'000.-- auf ein Konto „Bildung plus" der KB. p = 3. Danach während 3 Jahren (bis Ende 2003) eine noch zu bestimmende monatlich nachschüssige Rate **R**. Während des Studiums (Beginn Anfang 2004) soll die Tochter CHF 1'100.-- monatlich vorschüssig zur Verfügung haben. Berechnen Sie R.

Aufgabe 3.37
Sie zahlen 20 Jahre lang monatlich nachschüssig CHF 230.-- bis zum 65sten Altersjahr ein. p = 4. Danach erhalten Sie monatlich vorschüssig CHF 600.--. bis an das Lebensende. Wie alt müssten Sie werden (Dezimalstellen erlaubt), damit diese Geldanlage rentiert?

Aufgabe 3.38
Severin legt nach einem Quartal, Ende März, CHF A und Ende September CHF 2A auf die Bank. Jährliche Verzinsung mit p = 5. Diesen Einzahlungsmodus möchte Severin einige Jahre beibehalten.

a) Entwickeln Sie für Severin eine Formel, die es ihm erlaubt, den Kontostand nach ein, zwei, drei, ... Jahren zu berechnen.
b) Nach 10 Jahren möchte Severin 20'000.- CHF auf dem Konto haben. Wie hoch ist dann die konstante Zahlung A?

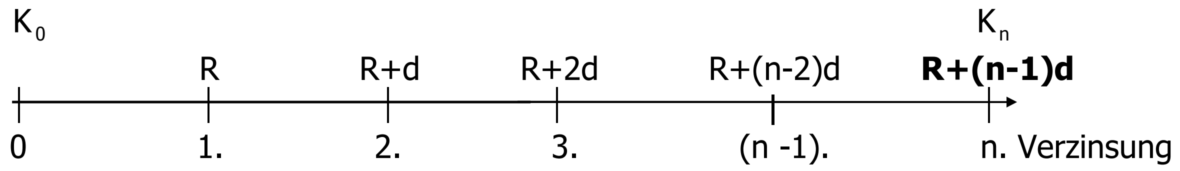
Aufgabe 3.39
Monika legt nach drei Quartalen CHF A auf die Bank. Nach weiteren drei Quartalen legt Monika wieder CHF A auf die Bank. Dieser Zyklus wiederholt sich alle zwei Jahre, d. h., nach 2 ¾ Jahren legt Monika das dritte Mal CHF A auf die Bank, usw. Verzinsung jährlich mit 5%.
Bestimmen Sie Kapital mit Zinseszinsen nach zwei Jahren. $K_2 = ...$
Entwickeln Sie für Monika eine Formel, die es ihr erlaubt, den Kontostand nach zwei, vier, sechs, ... Jahren zu berechnen.
Nach 10 Jahren möchte

Aufgabe 3.40
Hubert Wey möchte eine monatlich vorschüssige ewige Rente von CHF 2'500.-- beziehen. Wie hoch müssen seine konstanten nachschüssigen vierteljährigen Raten sein, die er während 20 Jahren einzahlen muss? Jährliche Verzinsung mit 5%

Aufgabe 3.41
Martin legt **jeweils** nach einem Quartal, Ende März CHF 100.--, Ende Juni CHF 200.-, Ende September CHF 100.- und Ende Dezember CHF 200.- auf die Bank. Verzinsung jährlich mit 4.5%. Der Einzahlungsmodus ist in den folgenden Jahren gleich.
Berechnen Sie das Kapital nach einem Jahr.
Nach wie vielen Jahren (Dezimalstellen erlaubt) wächst sein Kapital mit Zinseszinsen auf CHF 10’000.-- an?

3.2.3 Arithmetisch fortschreitende Rentenzahlung

3.2.3.1 Nachschüssig arithmetisch fortschreitende Rentenzahlung



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
d = absoluter Betrag um den R von Verzinsung zu Verzinsung erhöht wird

Abbildung 8: Darstellung der nachschüssig arithmetisch fortschreitenden Ein- oder Auszahlungen R + …d zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.7

Kontostand nach n Verzinsungen bei n nachschüssig arithmetisch fortschreitenden Zahlungen zu den Zinsterminen:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm \left(R + \frac{d}{r-1}\right) \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \mp \frac{n \cdot d}{r-1}$$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R+ …d= Ein- oder Auszahlung zu Beginn eines Zinsintervalls
r $= 1 + \frac{p}{100}$
d = absoluter Betrag um den R von Verzinsung zu Verzinsung erhöht wird

Aufgabe 3.42
Zum Ende des gerade beginnenden Jahres werde eine Rente von über 10'000.- CHF fällig. Die Rentenbeträge für die nachfolgenden Jahre sollen um jeweils 1'000.- CHF erhöht werden. Die Verzinsung erfolge jährlich mit 4%.
Berechnen Sie den Endwert der Rentenzahlungen nach 20 Jahren.

3.2.3.2 Vorschüssig arithmetisch fortschreitende Rentenzahlung

K_0					K_n
R	R+d	R+2d	R+(n-2)d	**R+(n-1)d**	
0	1.	2.	3.	(n -1).	n. Verzinsung

K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
d = absoluter Betrag um den R von Verzinsung zu Verzinsung erhöht wird

Abbildung 9: Darstellung der vorschüssig arithmetisch fortschreitenden Ein- oder Auszahlungen R + …d zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.8

Kontostand nach n Verzinsungen bei n vorschüssig arithmetisch fortschreitenden Zahlungen zu den Zinsterminen:

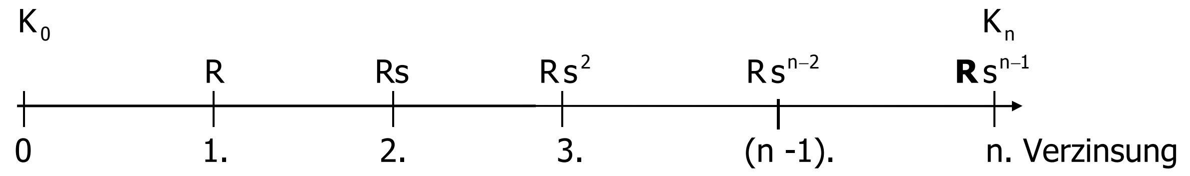
$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm r \cdot \left(R + \frac{d}{r-1}\right) \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \mp \frac{n \cdot d \cdot r}{r-1}$$

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R+…d = Ein- oder Auszahlung zu Beginn eines Zinsintervalls
r $= 1 + \frac{p}{100}$
d = absoluter Betrag um den R von Verzinsung zu Verzinsung erhöht wird

Aufgabe 3.43
Zum Beginn des gerade beginnenden Jahres werde eine Rente von über 10'000.- CHF fällig. Die Rentenbeträge für die nachfolgenden Jahre sollen um jeweils 1'000.- CHF erhöht werden. Die Verzinsung erfolge jährlich mit 4%.
Berechnen Sie den Endwert der Rentenzahlungen nach 20 Jahren.

3.2.4 Geometrisch fortschreitende Rentenzahlung

3.2.4.1 Nachschüssig geometrisch fortschreitende Rentenzahlung



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
q = von Verzinsung zu Verzinsung prozentual konstante Veränderung von R

Abbildung 10: Darstellung der nachschüssig geometrisch fortschreitenden Ein- oder Auszahlungen zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.9

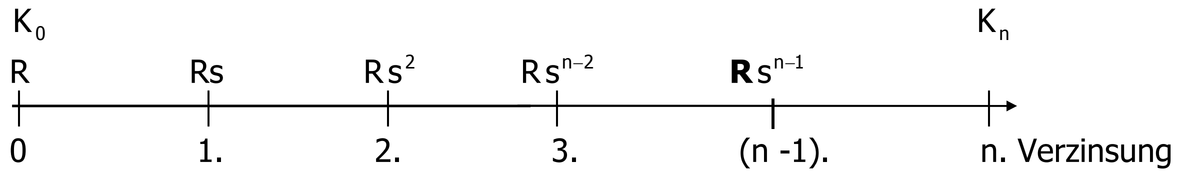
Kontostand nach n Verzinsungen bei n nachschüssig geometrisch fortschreitenden Zahlungen zu den Zinsterminen:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \frac{s^n - r^n}{s - r}$$ "+"Sparerformel, "–"Rentenformel,

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R... = Ein- oder Auszahlung am Ende eines Zinsintervalls
r $= 1 + \frac{p}{100}$
q = von Verzinsung zu Verzinsung prozentual konstante Veränderung von R
s $= 1 + \frac{q}{100}$

Aufgabe 3.44
Eine Rente werde jeweils zum Jahresende ausbezahlt. Der erste Betrag sei 10'000.- CHF. Danach steige die Rente jährlich um 5%. Bestimmen Sie den Rentenendwert nach 10 Jahren. p = 4.

3.2.4.2 Vorschüssig geometrisch fortschreitende Rentenzahlung



K_0 = Anfangskapital
K_n = Endkapital
R = Rente/Rate
q = Prozentual konstante Veränderung von R von Verzinsung zu Verzinsung

Abbildung 11: Darstellung der vorschüssig geometrisch fortschreitenden Ein- oder Auszahlungen zu den Zinsterminen auf dem Zeitstrahl

Satz 3.10

Kontostand nach n Verzinsungen bei n vorschüssig geometrisch fortschreitenden Zahlungen zu den Zinsterminen:

$$K_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot r \cdot \frac{s^n - r^n}{s - r}$$ "+"Sparerformel, "–"Rentenformel,

K_n = Kontostand nach n Zinsintervallen
K_0 = Anfangskapital (K_0 = 0 ist bei der Sparerformel möglich)
p = Zinssatz pro Zinsintervall
n = Laufzeit in Zinsintervallen bei entsprechender Verzinsung
R... = Ein- oder Auszahlung zu Beginn eines Zinsintervalls
r $= 1 + \frac{p}{100}$
q = von Verzinsung zu Verzinsung prozentual konstante Veränderung von R
s $= 1 + \frac{q}{100}$

Aufgabe 3.45
Eine Rente werde jeweils zum Jahresanfang ausbezahlt. Der erste Betrag sei 10'000.- CHF. Danach steige die Rente jährlich um 5%. Bestimmen Sie den Rentenendwert nach 10 Jahren. p = 4.

Zusatzaufgabe 1: **Tages-Anzeiger** ,11. März 2008

Neue Zahlen zur AHV-Heiratsstrafe

AUTOR: Von Roland Schlumpf, Bern

Wer verheiratet ist, kann bei der AHV schlechter gestellt sein als Konkubinatspaare. Das soll vorerst so bleiben, findet der Ständerat. Und dafür gibt es auch einige gute Gründe.

Die maximale Ehepaarrente bei der AHV beträgt 3315 Franken pro Monat. Das entspricht 150 Prozent der maximalen Einzelrente. Dahinter steht die Überlegung, dass die Lebenshaltungskosten für ein Paar etwa das 1,5-Fache einer Einzelperson betragen.

So weit, so gut. Für ein Konkubinatspaar gilt diese Regelung aber nicht. Im besten Fall kann es nämlich zwei individuelle Maximalrenten bekommen, also zweimal 2210 Franken. Für das Konkubinatspaar macht das 4420 Franken, also 1105 Franken mehr als für ein verheiratetes Paar.

Diese Differenz wird immer wieder kritisiert und als «Heiratsstrafe in der AHV» etikettiert. Um Abhilfe zu schaffen, hat der Aargau eine Kantonsinitiative nach Bern geschickt, eine entsprechende aus Zürich ist ebenfalls unterwegs. Der Ständerat wollte gestern keinen Anlauf nehmen, um diese Ungerechtigkeit zu beseitigen. Er hat einstimmig darauf verzichtet, auf die Initiative überhaupt einzutreten. Allerdings anerkannte er das Problem und gab der Verwaltung den Auftrag, einen Bericht mit Lösungsansätzen zu erstellen. Die Möglichkeiten sollten dann erst im Rahmen der 12. AHV-Revision ausgelotet werden.

Dabei geht es in erster Linie um finanzielle Überlegungen. Würde nämlich der Plafond von 150 Prozent vollständig aufgehoben, hätte dies gemäss einem bereits bestehenden Bericht des Bundesamtes für Sozialversicherungen (BSV) zusätzliche Kosten von nicht weniger als 1,7 Milliarden Franken zur Folge.

Der Bericht enthält nicht nur umfangreiche Berechnungen. Das BSV rechtfertigt auch den zivilstandsabhängigen Rentenanspruch mit Vorteilen für Ehepaare. Die wichtigsten sind:

Nichterwerbstätige müssen keine eigenen AHV-Beiträge bezahlen, wenn die Partnerin oder der Partner mindestens den doppelten Mindestbeitrag pro Jahr entrichtet.

Nur verheiratete Personen haben vor dem Rentenalter im Fall des Ablebens des Partners Anspruch auf eine Witwen- oder Witwerrente.

Verwitwete Personen im Rentenalter erhalten einen Zuschlag von 20 Prozent zu ihrer eigenen Altersrente, allerdings höchstens bis zum Betrag der Maximalrente. 2007 erhielten rund 400 000 Personen einen solchen Zuschlag, während dieser bei 43 000 Personen nicht wirksam war. Die jährlichen Kosten dieses Zuschlags betragen 1,2 Milliarden Franken.

Der Bericht des BSV relativiert auch die eingangs dargestellte Rentendifferenz von 1105 Franken pro Monat zwischen Ehe- und Konkubinatspaaren. Letztere können das Maximum von 4420 nur erreichen, wenn jeder Partner über ein Renten bildendes

Einkommen von mindestens 70 560 Franken und über eine vollständige Beitragsdauer verfügt.

Deshalb würden auch nicht einfach sämtliche Ehepaare 1105 Franken mehr AHV-Rente erhalten, wenn der Plafond von 150 Prozent aufgehoben würde. Gemäss BSV beziehen rund 85 Prozent der Ehepaare eine plafonierte Rente. Ihr Rentenbetrag würde sich ohne Plafond im Durchschnitt um 500 Franken erhöhen.

Zur Zusatzaufgabe 1
Lebenserwartung (2006) ab 65 Jahren:
Mann 83 (83.3), 83 Jahre – 65 Jahre = 18 Jahre
Frau 86.8
Berechnen Sie die Differenz des Jahresendwertes zwischen 2 Einzelrenten (4420.- sFr.) und einer Ehepaarente (3315.- sFr.). Diesen Wert nennen wir künftig die konforme nachschüssige „Annuität" pro Zinsperiode.
Wir nehmen an, dass dies konforme nachschüssige Annuität jährlich um q = 1% wachse. p = 3.5%.
Berechnen Sie die Differenz der Heiratsstrafe zu Einzelrenten für die Laufzeit von 18 Jahren.

Zusatzaufgabe 2

Ein Bausparvertrag sieht folgende Cashflows vor:
Im ersten Jahr zahlen Sie 500.- sFr. monatlich nachschüssig ein. Die konforme, jährig, nachschüssige Sparrate erhöhe sich anschliessend alle Jahre um 2000.- sFr. Der durchschnittliche, nominelle Jahreszinsfuss beträgt 3.5%.

a) Nach wie vielen Jahren haben Sie die heute geforderte Anzahlung von 238‘000.- sFr. auf dem Konto?
b) Wie hoch ist die Monatsrate im 7. Jahr?

3.3 Tilgungsrechnung

In der Tilgungsrechnung befassen wir uns mit der Rückzahlung von Krediten. Für die Schuld (Darlehen) S werden vom Schuldner jeweils am Ende jeder Zinsperiode p % Zinsen mit Zinseszinsen verlangt.
In diesem Kapitel wird verlangt, dass die Schuld S einschliesslich der anfallenden Zinsen nach **N** Zinsperioden vollständig getilgt sein muss.

Unter einem **Tilgungsbetrag T** versteht man denjenigen Betrag, um den sich die Restschuld durch die Rückzahlung verringert. Zusätzlich zu diesem Tilgungsbetrag T müssen noch die zum Zahlungstermin fälligen **Zinsen Z** gezahlt werden. Der insgesamt zu zahlende Betrag heisst **Annuität A**.

$$\underset{\text{Annuität}}{\underset{||}{A}} = \underset{\text{Tilgungsbetrag}}{\underset{||}{T}} + \underset{\text{anfallende Zinsen}}{\underset{||}{Z}}$$

Wir betrachten zwei Rückzahlungsmodelle.

In der Annuitätentilgung sind die zurückzahlenden Annuitäten konstant.
In der Ratentilgung sind die zurückzahlenden Annuitäten nicht konstant.

3.3.1 Übersicht

Beispiel 3.11
Eine Schuld von CHF 20’000.- muss in 5 Jahren vollständig zurückbezahlt werden. Berechnen Sie die 5 nachschüssigen Annuitäten bei jährlicher Verzinsung mit 12 %.

1. Annuitätentilgung

Jahr n	A_n	S_n	T_n	Z_n	Barwert v. A_n
0		20000.00			
1	5548.19	16851.81	3148.19	2400.00	4953.75
2	5548.19	13325.83	3525.98	2022.22	4422.99
3	5548.19	9376.73	3949.10	1599.10	3949.10
4	5548.19	4953.75	4422.99	1125.21	3525.98
N=5	5548.19	0.00	4953.75	594.45	3148.19
Summe	27740.97		20000.00	7740.97	20000.00

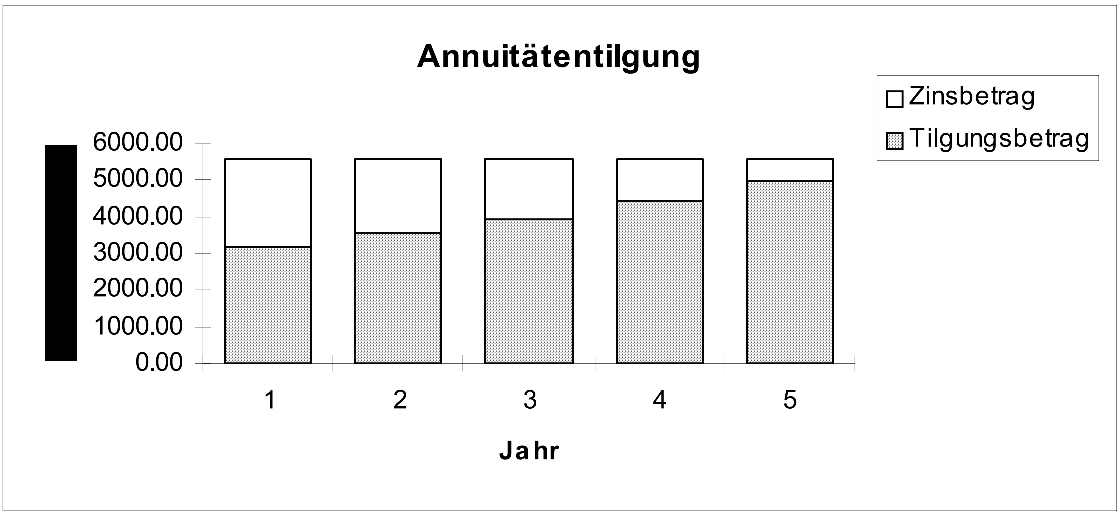


Abbildung 12: Rückzahlung von 20’000.- mittels 5 konstanten nachschüssigen Annuitäten. p = 12.

2. Ratentilgung

Jahr n	T_n	S_n	Z_n	A_n	Barwert v. A_n
0		20'000			
1	4'000	16'000	2400	6'400	5714.29
2	4'000	12'000	1920	5'920	4719.39
3	4'000	8'000	1440	5'440	3872.08
4	4'000	4'000	960	4'960	3152.17
N=5	4'000	0	480	4'480	2542.07
Summe	20'000		7200	27'200	20000.00

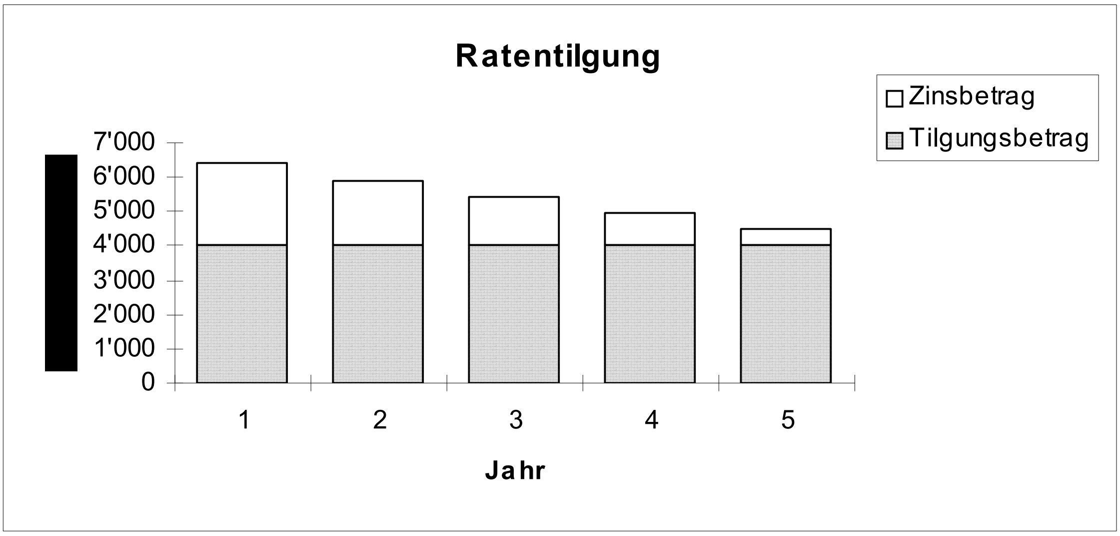


Abbildung 13: Rückzahlung von 20’000.- mittels 5 unkonstanten nachschüssigen Annuitäten. p = 12.

3.3.2 Annuitätentilgung

3.3.2.1 Annuitätentilgungen zu den Zinsterminen

Bei einem Zinssatz von p % soll zu den Zinsterminen die **konstante Annuität A** gezahlt werden.

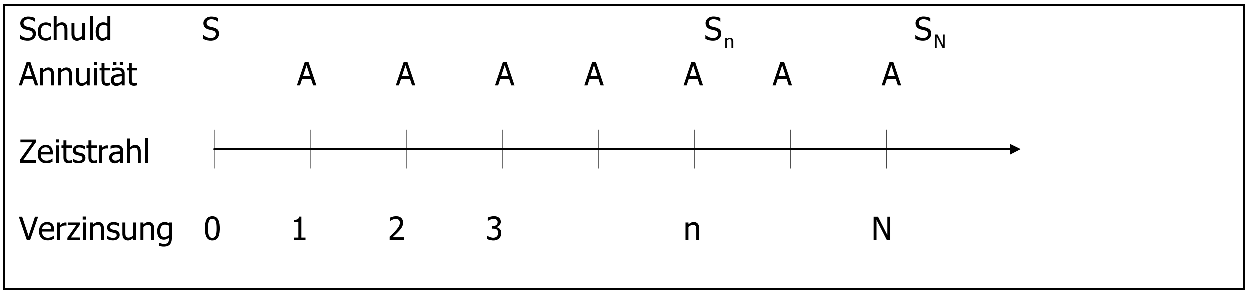


Abbildung 14: Nachschüssige Annuitätentilgung zu den Zinsterminen

Wir erhalten das gleiche Schema wie früher und können somit die dort hergeleiteten Formeln übernehmen.

Satz 3.11

Für die Restschuld S_n (kann Null sein) nach n Zinsperioden bei konstanten zinsterminlichen nachschüssigen Annuitäten A gilt:

$$S_n = S \cdot r^n - A \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$T_n = \left(A - S \cdot \frac{p}{100} \right) \cdot r^{n-1}$$

$$Z_n = A - \left(A - S \cdot \frac{p}{100} \right) \cdot r^{n-1}$$

A =

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$S =$ Ausgangsschuld

$A =$ Annuität zu den Zinsterminen

$S_n =$ Restschuld $n = 1, 2, 3, \ldots, N - 1$ $S_N = 0$

$T_n =$ Tilgung zum $n -$ ten Zinstermin

$Z_n =$ Zins zum $n -$ ten Zinstermin

$p =$ Zins pro Zinsperiode

Aufgabe 3.46

Lösen Sie die Gleichung $S_n = S \cdot r^n - A \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ nach A auf.

Aufgabe 3.47
Die Maschine AEX mit Anschaffungspreis von CHF 750'000.- kann während 10 Jahren geleast werden. Der vereinbarte Restwert nach 10 Jahren beträgt CHF 50'000.-

a) Berechnen Sie die konstante nachschüssige Annuität bei jährl. Verzinsung mit 5%
b) Wie hoch ist bei der 7. Annuitätenzahlung der Zinsanteil?
c) Wie hoch ist bei der 5. Annuitätenzahlung der Tilgungsanteil?

Eine Annuitätenschuld ist genau nach N Zinsperioden getilgt, falls S_N **= 0** ist.

$$S_N = S \cdot r^N - A \cdot \frac{r^N - 1}{r - 1} = 0$$

$$A = \frac{S \cdot r^N \cdot (r-1)}{r^N - 1}$$

$$S = \frac{A \cdot (r^N - 1)}{r^N \cdot (r-1)} \qquad\qquad N =$$

$$S_n = \frac{S \cdot (r^N - r^n)}{r^N - 1}$$

$$T_n = \frac{A \cdot r^{n-1}}{r^N}$$

$Z_n = A - T_n$ für $n = 1,2,3,...,N$

$N =$ Vorgegebene Tilgungsdauer in Zinsperioden

$S =$ Ausgangsschuld

$A =$ Annuität zu den Zinsterminen

$S_n =$ Restschuld $\quad n = 1, 2, 3, ..., N-1 \quad\quad S_N = 0$

$T_n =$ Tilgung zum n – ten Zinstermin

$Z_n =$ Zins zum n – ten Zinstermin

Aufgabe 3.48
Lösen Sie die Gleichung oben nach N auf.

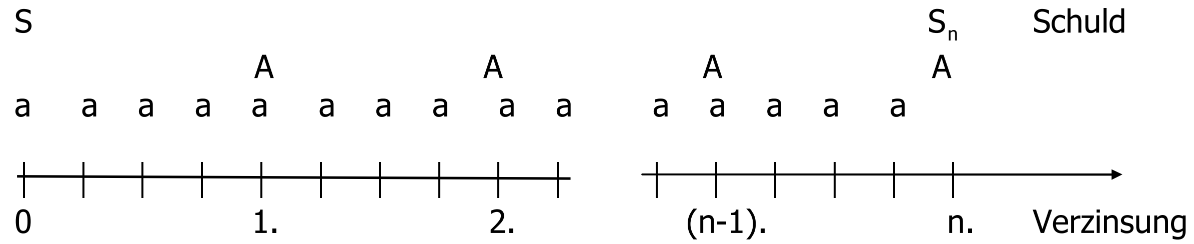
Aufgabe 3.49
Von einem Darlehen über CHF 50'000.- mit dem Jahreszinssatz von 6 % wird jeweils zum Jahresende CHF 4'500.- einschliesslich anfallender Zinsen zurückbezahlt. Berechnen Sie N. Wie viele konstante Annuitäten sind zu zahlen. Wie hoch ist die letzte Rate, die ein Jahr nach der letzten konstanten Annuität gezahlt wird?

Aufgabe 3.50
Ein Darlehen in Höhe von CHF 200'000.- mit einem Jahreszinssatz von 5 % soll mit 15 nachschüssig konstanten Annuitäten getilgt werden. Berechnen sie A.

Aufgabe 3.51
Ein Darlehen in der Höhe von CHF 60'000.- und einem Jahreszinssatz von 5 % soll mit 10 konstanten Jahresraten A abgezahlt werden. Berechnen sie die Annuität bei vor- und nachschüssiger Zahlungsart.

3.3.2.2 Unterzinsterminliche Annuitätentilgung ohne unterzinsterminliche Verzinsung

Während jeder Zinsperiode soll m mal **unterzinsterminlich** die **konstante vorschüssige Annuität a** gezahlt werden.



A = Konforme Annuität
a = unterzinsterminliche Annuität

Abbildung 15: m unterzinsterminlich vorschüssig konstante Annuitäten auf dem Zeitstrahl dargestellt. m = 1,2,3,4,5,... . In der Abbildung ist m = 4.

Wir erhalten das gleiche Schema wie früher und können somit die dort hergeleiteten Formeln übernehmen.

Satz 3.12

Für die Restschuld S_n nach n Zinsperioden bei m unterzinsterminlich vorschüssigen Annuitätenzahlungen der Höhe a gilt: $S_n = S \cdot r^n - a \cdot \left(m + \frac{(m+1) \cdot p}{200} \right) \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

S = Ausgangsschuld
A = unterzinsterminliche vorschüssig konstante Annuität
S_n = Restschuld nach n Verzinsungen n = 1, 2, 3, ... **N**
m = Anzahl der äquidistanten unterzinsterminlichen Annuitätenzahlungen pro Verzinsung
p = Zinssatz pro Zinsperiode

Nach den beiden obigen Sätzen

$$S_n = S \cdot r^n - A \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_n = S \cdot r^n - a \cdot \left(m + \frac{(m+1) \cdot p}{200} \right) \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

muss gelten:

Satz 3.13

m unterzinsterminlich vorschüssigen Annuitäten der Höhe a entspricht die konforme Annuität A pro Zinsperiode mit $A = a \cdot \left(m + \frac{(m+1) \cdot p}{200} \right)$

a = unterzinsterminliche Annuität
A = konforme nachschüssige Annuität pro Zinsperiode

Diese auf die Zinsperioden hochgerechnete Annuität A liefert nach n Zinsperioden dieselbe Restschuld S_n wie die m unterzinsterminlichen Annuitätenzahlungen der Höhe a. Somit können mit dieser konformen Annuität A alle Formeln aus dem entsprechenden Abschnitt übernommen werden.

Aufgabe 3.52
Zeigen Sie, dass wenn Sie im Satz oben $m = 1$ setzen, die Restschuld für eine vorschüssig zinsterminlich konstante Annuität erhalten. Sie können dann die Formeln von früher übernehmen.

Aufgabe 3.53
Eine Schuld über CHF 60’000.- werde jährlich mit 7.5 % verzinst und soll in 10 Jahren getilgt sein.

a) Berechnen Sie die jährlich nachschüssige Annuität.
b) Berechnen Sie die jährlich vorschüssige Annuität.
c) Berechnen Sie die monatlich nachschüssige Annuität.
d) Berechnen Sie die monatlich vorschüssige Annuität.

Aufgabe 3.54
Für ein Bauspardarlehen über CHF 100’000.- muss monatlich CHF 750.- zurückbezahlt werden. Die Verzinsung erfolgt vierteljährlich mit jeweils 1.25 %. Gesucht ist die Restschuld nach 15 Jahren sowie die Laufzeit bei

a) nachschüssiger monatlicher Annuitätenzahlung.
b) vorschüssiger monatlicher Annuitätenzahlung.

Aufgabe 3.55
Ein Gerät der Unterhaltungselektronik können Sie mit 24 monatlich vorschüssigen konstanten Raten à CHF 99.90 leasen. Der Mitnahmepreis beträgt CHF 1955.--, der Restwert CHF 99.90. Berechnen Sie numerisch den nominellen Jahreszinsfuss.

Ein Gerät der Unterhaltungselektronik können Sie mit 24 monatlich vorschüssigen konstanten Raten à CHF 99.90 leasen. Der Restwert beträgt 10% des Mitnahmepreises. Verzinsung jährlich mit p = 25. Berechnen Sie den Mitnahmepreis.

Aufgabe 3.56
Zur Rückzahlung eines Kredites mit dem Jahreszinssatz von 14.99 % kann Max Meier monatlich vorschüssig während 4 Jahren maximal CHF 450.- zahlen.
Wie hoch kann der Kreditbetrag höchstens sein?

Aufgabe 3.57
Ein Kredit über CHF 80’000.- wird halbjährig mit 4 % verzinst. Die Rückzahlung erfolgt in nachschüssigen monatlichen Annuitäten von CHF 1’000.-.

a) Berechnen sie die konforme nachschüssige Halbjahresannuität.
b) Berechnen sie die Laufzeit.
c) Welche verringerten Monatsannuitäten müssen im letzten Halbjahr gezahlt werden?

Aufgabe 3.58
Eine Schuld von CHF 500’000.-- wird jährlich mit 8% verzinst und während 10 Jahren wie folgt amortisiert: Ende März erfolgt jeweils eine Zahlung von CHF 16’000.--, Ende Juni CHF 22’000.-, Ende September CHF 16’000.--. Wie sind die konstanten Zahlungen Ende Dezember?

Aufgabe 3.59
Ein Fernsehgerät der Marke Sony MXP kostet netto CHF 3666.-. Die Leasingsraten sind monatlich vorschüssig während drei Jahren zu entrichten.

a) Der Restwert nach drei Jahren soll gerade so hoch wie eine Leasingsrate sein. Berechnen Sie bei jährlicher Verzinsung mit 7% die konstanten Leasingsraten?
b) Der Restwert beträgt CHF 250.-, die konstante Leasingsrate CHF 99.50. Mit welcher jährlichen Verzinsung wird gerechnet?

Aufgabe 3.60
Ein Kredit über CHF 350’000.- mit einer Laufzeit von 10 Jahren ist jeweils vierteljährlich mit 1.75 % zu verzinsen. Bestimmen Sie die konstante nachschüssige Annuität, falls die Annuitätenzahlung

a) jährlich,
b) halbjährlich,
c) vierteljährlich,
d) monatlich

erfolgt.

Aufgabe 3.61
Eine Schuld in Höhe von CHF 75’000.- muss jährlich mit 8 % verzinst und jährlich mit CHF 9’000.- nachschüssig zurückbezahlt werden.

a) Bestimmen Sie die Laufzeit.
b) Bestimmen Sie die Restschuld am Ende des letzten ganzen Jahres der Laufzeit.
c) Welche Restannuität muss am Ende des darauffolgenden Jahres gezahlt werden?

Aufgabe 3.62
Ein Darlehen von CHF 10’000’000.-- wird vierteljährlich mit 2% verzinst und soll im Laufe der folgenden 22 Jahre wie folgt zurückbezahlt werden:
Während der ersten 10 Jahre erfolgt je am Ende des Jahres eine konstante Annuität von CHF 1’000’000.--. Nachher soll die Restschuld während 12 Jahren mit vierteljährlich nachschüssig konstanten Annuitäten amortisiert werden.
Berechnen Sie die Annuität.

Aufgabe 3.63
Für Rentner A muss eine achtfache vorschüssige Jahresrente von CHF 20’000.-- in eine zehnjährige nachschüssige Monatsrente umgewandelt werden. Berechnen Sie die monatlichen Zahlungen für einen Jahreszinsfuss von 5% bei jährlicher Verzinsung.

Aufgabe 3.64

a) Laut Inserat gilt:

Nettopreis	CHF 16990.-
Monatl. vorschüss. Rate	CHF 255.-
Laufzeit	48 Mte.
	10’000 km/J.
Nomineller Jahreszinsfuss	4. 9 %

Berechnen Sie den Restwert.

b) Annahme:

Nettopreis	CHF 16990.-
Monatl. vorschüss. Rate	CHF 266.--
Laufzeit	48 Mte.
	15’000 km/J.
Restwert	CHF 6’650.-

Wie hoch müsste Herr Meiers Eigenkapitalrendite p (nomineller Jahreszinssatz) sein, damit die Kauf- und Leasingvarianten gleichwertig sind?

c) dito b) aber zusätzlich erfolgt eine Anzahlung von 1000.- CHF.

d) dito c) aber die regelmässigen Raten erfolgen nachschüssig e) dito c) aber mit 49 Raten („vorschüssig“) f) Annahme: Nettopreis CHF 16990.- Laufzeit 48 Mte. 20’000 km/J. Nomineller Jahreszinsfuss 4. 9 % Restwert CHF 5’600.- Berechnen Sie die monatlich vorschüssige Rate. g) Annahme: Nettopreis CHF 16990.- Monatl. vorschüss. Rate CHF 266.- Laufzeit 48 Mte. 15’000 km/J. Restwert CHF 6’650.- Kaution unverzinst CHF 1’699.- Wie hoch müsste Herr Meiers Eigenkapitalrendite p (nomineller Jahreszinssatz) sein, damit die Kauf- und Leasingvarianten gleichwertig sind? h) dito g) aber Herr Meier könnte die Kaution als eigenes Investment zu 10 % verzinst anlegen. i) Annahme: Nettopreis CHF 16990.- Monatl. vorschüss. Rate CHF 266.- Laufzeit 48 Mte. 15’000 km/J. Restwert CHF 6’650.- Kaution unverzinst CHF 1’699.- Herr Meiers übernimmt nach 4 Jahren das Auto zum Restwert. Berechnen Sie den Barwert aller Zahlungen mit p = 4. j) dito f) aber die ersten drei Monate sind zahlungsfrei. k) dito j) aber nur noch 45 Raten	

Aufgabe 3.65

Berechnung für Leasing-Vertrag der AMAG-Leasing **VW Golf VR6**

Katalogpreis	CHF	36'380.-
Nettopreis	CHF	33'191.-
Kaution	CHF	3'319.-
Restwert	CHF	14'538.-
Monatl. vorschüss. Annuität	CHF	528.-
Laufzeit		48 Monate
		10'000 km pro Jahr

Restwerttabelle für VR6

	10'000 km	15'000 km	20'000 km
12 M.	60.6	59.2	57.9
24 M.	53.3	50.7	48.2
36 M.	49.2	45.3	41.4
48 M.	43.8	39.4	35.0

Versicherungen (Stand 1994)

abhängig vom Leasing	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
Vollkasko Selbstbehalt 1'000.- ohne Zeitwertzusatz	2'303.- 100 %	2'072.70 90 %	1'842.40 80 %	1'612.10 70 %
Vollkasko Selbstbehalt 1'000.- mit Zeitwertzusatz	2'504.- 100 %	2'253.60 90 %	2'003.20 80 %	1'752.80 70 %
Teilkasko 100% Selbstbehalt 200.- ohne Selbstbehalt	 375.- 469.-	 375.- 469.-	 375.- 469.-	 375.- 469.-

a) Wie hoch müsste die Eigenkapitalrendite p (nomineller Jahreszinssatz) sein, damit die Kauf- und Leasingvarianten gleichwertig sind? Die Kaution wird bei diesem Aktionsleasing nicht verzinst.
b) Mit welchem Zinsfuss arbeitet der Leasingsgeber? Kaution nicht berücksichtigen!
c) Der Kunde übernimmt nach Vertragsablauf den Wagen, indem er seine Kaution als Kaufpreis = Restwert verfallen lässt (**Null-Leasing**). Problem: Abzahlungsgeschäft! Berechnen Sie die monatlich vorschüssige Annuität bei einem Zinssatz mit 7 %.
d) Die Laufzeit beträgt 48 Monate bei einer jährlichen Fahrleistung von 15'000 km. Berechnen Sie die monatlich vorschüssige Annuität bei einem Zinssatz mit 7 %. Kaution unverzinst berücksichtigen.
e) Die Laufzeit beträgt 48 Monate bei einer jährlichen Fahrleistung von 15'000 km. Berechnen Sie die monatlich vorschüssige Annuität bei einem Zinssatz mit 7 %. Die Kaution wird nach 4 Jahren zinsesverzinst zurückerstattet.
f) Der Wagen wird nach 4 Jahren zum Restwert übernommen (60'000 km). Berechnen Sie den Barwert aller Zahlungen mit p = 4. a = 550.-, K unverzinst, R = 13'077.-

Aufgabe 3.66
Treffen Sie einen Investitionsentscheid - Profit/Lost. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen anhand von Berechnungen. Zinsfuss = 3 % p.a. Modus : 30/360
Es gilt z. B. : 30.12. 2005 entspricht dem 1.1. 2006

Datum		revenue	revenue	expense	expense
30.12.2004	01.01.2005				SFr. 150'000.00
30.01.2005	01.02.2005				
30.02.2005	01.03.2005			SFr. 10'000.00	
30.03.2005	01.04.2005				
30.04.2005	01.05.2005			SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.05.2005	01.06.2005				
30.06.2005	01.07.2005			SFr. 10'000.00	
30.07.2005	01.08.2005				
30.08.2005	01.09.2005			SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.09.2005	01.10.2005				
30.10.2005	01.11.2005			SFr. 10'000.00	
30.11.2005	01.12.2005				
30.12.2005	01.01.2006	SFr. 25'000.00	SFr. 50'000.00	SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.01.2006	01.02.2006				
30.02.2006	01.03.2006			SFr. 10'000.00	
30.03.2006	01.04.2006	SFr. 25'000.00			
30.04.2006	01.05.2006			SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.05.2006	01.06.2006				
30.06.2006	01.07.2006	SFr. 25'000.00		SFr. 10'000.00	
30.07.2006	01.08.2006				
30.08.2006	01.09.2006			SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.09.2006	01.10.2006	SFr. 25'000.00			
30.10.2006	01.11.2006			SFr. 10'000.00	
30.11.2006	01.12.2006				
30.12.2006	01.01.2007	SFr. 25'000.00		SFr. 10'000.00	SFr. 5'000.00
30.01.2007	01.02.2007				
30.02.2007	01.03.2007				
30.03.2007	01.04.2007	SFr. 25'000.00			
30.04.2007	01.05.2007				
30.05.2007	01.06.2007				
30.06.2007	01.07.2007	SFr. 25'000.00			
30.07.2007	01.08.2007				
30.08.2007	01.09.2007				
30.09.2007	01.10.2007	SFr. 25'000.00			
30.10.2007	01.11.2007				
30.11.2007	01.12.2007				
30.12.2007	01.01.2008		SFr. 100'000.00		

Aufgabe 3.67
Dito oben aber am 30.08. 2006 haben wir noch eine zusätzlichen Einnahme von 10'000.- SFr.

3.3.3 Ratentilgung

3.3.3.1 Ratentilgungen zu den Zinsterminen

Bei einem Ratenkredit der Höhe S mit einer Laufzeit von N Zinsperioden wird zu jedem Zinstermin die Tilgungsrate $T = \frac{S}{N}$ fällig. Neben der Tilgungsrate müssen noch die laufenden Zinsen gezahlt werden.

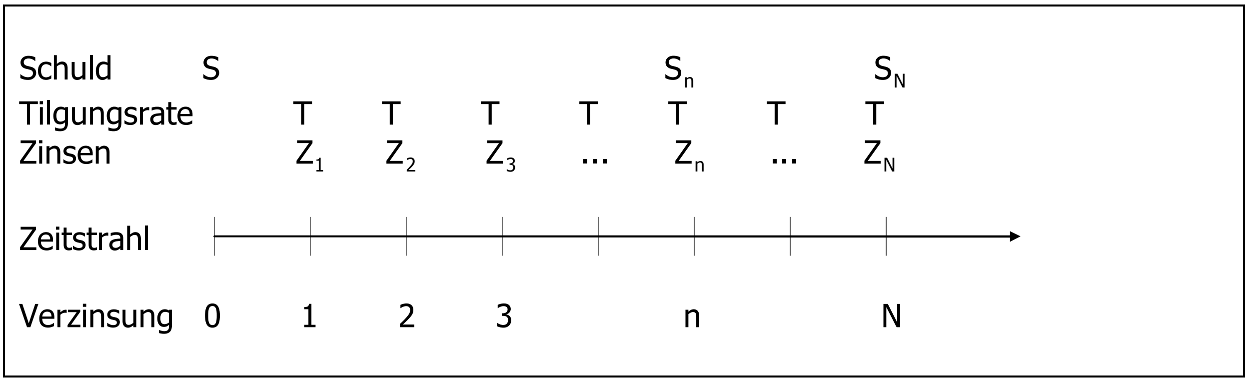


Abbildung 16: Nachschüssige Ratentilgung zu den Zinsterminen

Satz 3.14

Für nachschüssige Ratentilgungen zu den Zinsterminen gilt:

$$S_N = 0$$

$$S_n = S \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$Z_n = S \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \cdot \frac{p}{100}$$

$$A_n = \frac{S}{N} + S \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \cdot \frac{p}{100} = \frac{S}{N} \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot (N - n + 1)\right) \quad \text{für } n = 1, 2, ..., N$$

$$Z = S \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1+N}{2}$$

$S =$ Ausgangsschuld

$N =$ Tilgungsdaur in Zinsperioden

$T = \frac{S}{N} =$ konstante Tilgungsrate pro Zinsperiode

$Z_n =$ Zinsen für die n – te Zinsperiode

$A_n = T + Z_n =$ Annuität am Ende der n – ten Zinsperiode

$S_n =$ Restschuld nach n Zinsperioden

$Z =$ Gesamtzinsen bei konstanter Tilgungsrate T und der Laufzeit N

Aufgabe 3.68
Beweisen Sie den Satz oben.

Aufgabe 3.69
Ein Kredit über CHF 50'000.- mit dem Jahreszinssatz von 7 % soll mit konstanter Tilgungsrate jeweils zum Jahresende getilgt werden. Berechnen Sie: A_1, A_8, Z_6, Z.
N = 10.

Aufgabe 3.70
Für ein Darlehen über CHF 100'000.- müssen vierteljährlich 2 % Zinsen gezahlt werden. Die Laufzeit beträgt 20 Jahre. Die Tilgung soll vierteljährlich nachschüssig mit konstanten Tilgungsraten vorgenommen werden.
Berechnen Sie: N, T, $Z_{5 \text{Jahre}}$, $Z_{7.25 \text{Jahre}}$, $A_{10 \text{Jahre}}$, Z.

3.3.3.2 Unterzinsterminliche Tilgung einer Ratenschuld

Jedes Zinsintervall werde in m > 1 gleichlange Tilgungsintervalle zerlegt, an deren Ende jeweils Tilgungen vorgenommen werden. Bei einer Gesamtlaufzeit von N Zinsperioden wird die Gesamtschuld S durch m· N Tilgungen der jeweiligen Höhe $T = \frac{S}{m \cdot N}$ getilgt.

Unterjährige Verzinsung der unterjährigen Restschuld

Zu jedem der m· N Tilgungstermine mit der Tilgungsrate $T = \frac{S}{m \cdot N}$ müssen die anfallenden Zinsen gezahlt werden. Dabei werden von der unmittelbar vor der Tilgung bestehenden Restschuld $\frac{p}{m}$ % Zinsen berechnet. In diesem Modell ist es sinnvoll, die m· N Tilgungsintervalle als neue Zinsintervalle mit dem relativen Zinssatz $\frac{p}{m}$ zu wählen. Durch die Zuordnung $p \to \frac{p}{m}$ und $N \to m \cdot N$ können dann die Formeln aus diesem Kapitel übernommen werden.

Aufgabe 3.71
Die Tilgung eines Darlehens von CHF 100'000.- soll vierteljährlich nachschüssig mit konstanten Tilgungsraten und entsprechenden Zinsanteilen während 20 Jahren vorgenommen werden. Jährliche Verzinsung mit 8 %.
Berechen Sie: N, T, $Z_{1. \text{Quartal}}$, $Z_{40. \text{Q.}}$, Z

Aufgabe 3.72
Eine Schuld wird mit einer nachschüssig konstanten Tilgungsrate von CHF 200.-- während 60 Monaten vollständig getilgt. Die Zinsen sind bei einer halbjährigen Verzinsung mit 6% auch monatlich nachschüssig zu entrichten. Berechnen Sie:

a) Die Annuität nach einem halben Jahr
b) Den Zinsanteil für den zwölften Monat
c) Die Gesamtzinsen

Unterzinsterminliche Tilgung - keine unterzinsterminliche Verzinsung

Während der Tilgungsbetrag $T = \dfrac{S}{m \cdot N}$ m-mal unterzinsterminlich gezahlt wird, sollen die Zinsen am Ende einer Zinsperiode, also nach jeweils m Tilgungen gezahlt werden.

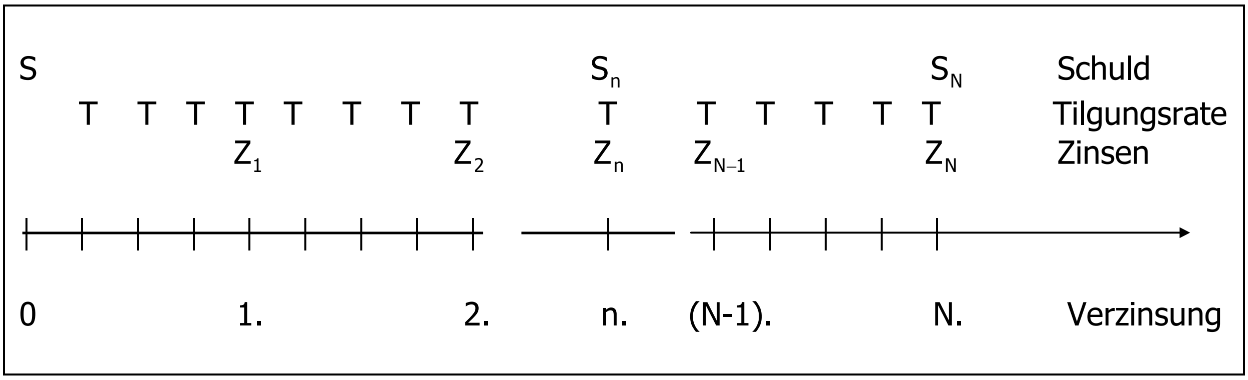


Abbildung 17: Zeitstrahl mit unterzinsterminlicher nachschüssiger Tilgung - keine unterjährige Verzinsung. m = 4 im Zeitstrahlmodell.

Satz 3.15

Für die unterzinsterminliche nachschüssige Tilgung ohne unterzinsterminliche Verzinsung gilt:

$$Z_n = \frac{p}{100} \cdot S \cdot \left(1 - \frac{1}{N} \cdot \left(n - \frac{m+1}{2m}\right)\right)$$

$$Z = \frac{p}{100} \cdot S \cdot \left(\frac{N-1}{2} + \frac{m+1}{2m}\right)$$

Z_n = Zins zum n – ten Zinstermin

m = Anzahl der nachschüssigen unterzinsterminlichen Tilgungen

N = Laufzeit der Ratenschuld in Zinsperioden

Z = Gesamtzinsen

Aufgabe 3.73

Eine Schuld von CHF 60’000.- wird jährlich mit 8 % verzinst. 60 Monate lang soll nachschüssig jeweils CHF 1’000.- getilgt werden. Gesucht sind die an den Jahresenden zusätzlich anfallenden Zinsen und die Gesamtzinsen Z.

Es folgen einige vermischte Aufgaben.

Aufgabe 3.74
Ein Kredit über CHF 50’000.- muss jährlich mit 6 % verzinst werden. Die Tilgung erfolgt in 20 gleichen Tilgungsraten jeweils zum Jahresende. Daneben sind die anfallenden Zinsen zu bezahlen.

a) Wie viele Zinsen müssen für das 10., das 15. und das letzte Jahr gezahlt werden?
b) Wie viel Zinsen fallen während der gesamten Laufzeit an?

Aufgabe 3.75
Für einen Ratenkredit über CHF 60’000.- muss monatlich nachschüssig CHF 500.- für die reine Tilgung aufgebracht werden.
Zusätzlich zu der monatlichen Tilgungsrate müssen 0.6 % Zinsen für die zum Monatsbeginn vorhandene Restschuld gezahlt werden. Wie viel Zinsen müssen

a) für den letzten Tilgungsmonat
b) insgesamt gezahlt werden?

Aufgabe 3.76
Eine Schuld von CHF 36’000.- wird jährlich mit 12 % verzinst. 48 Monate lang soll nachschüssig jeweils CHF 750.- getilgt werden. Gesucht sind die an den Jahresenden zusätzlich anfallenden Zinsen und die Gesamtzinsen Z.

Aufgabe 3.77
Eine Schuld von CHF 50’000.- muss in 10 Jahren vollständig getilgt werden. Jährliche Verzinsung mit $p = 12$.

a) Modus: Vierteljährige nachschüssige konstante Annuität. Berechnen Sie eine Annuität
b) Modus: Vierteljährige nachschüssige konstante Tilgungsrate und entsprechende Zinszahlung von der zu Quartalsbeginn bestehenden Restschuld. Berechnen Sie:
    - b1) Die Annuität nach 2 Jahren.
    - b2) Die Gesamtzinsen während der 10 Jahre.
    - b3) Zinszahlung am Ende des 5. Jahres.

4 Resultate

1 Mathematische Grundlagen

1. a) 12.5 b) 19 c) 26.5
2. a) -3, 24 b) 4 2/7, -5 1/7
3. a) nein b) ja c) nein
4.

Jahr	Restwert	Abschreibung
0	69300	8850
1	60450	8850
2	51600	8850
3	42750	8850
4	33900	8850
5	25050	8850
6	16200	8850

5. a) 20 b) 40.5 c) 634.2
6. a) 9, 1.201 b) 4, -512 c) 27, 59'049
7. a) nein b) 1.949 c) 5^{-8}
8. $n = 1 + \log_q \frac{a_n}{a_1}$ $q = (\pm) \cdot \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ $(\pm$, wenn $(n-1) \in IN_{Gerade}$, sonst $+)$
9. a) 1/27 b) 1/16 c) -2.875
10. 6905
11. a) 1/256, 2 b) ± 0.216, ± (5/3) c) ± 54, ± (2/3)
12. -
13. a) 20 b) 375 c) 63 d) 355 e) 15/16 f) 1'111'111
14.

a_1	d	n	a_n	s_n
7	0.25	16	10.75	142
- 0.75	- 0.875	25	- 21.75	-281.25
0.5	1	4	3.5	8
20	2	41	100	2460
1	1.25	5	6	17.5

15. 20
16. 13 cm
17. 593.16 Std.
18.

a_1	q	n	a_n	s_n
- 2/3	- 0.5	7	- 1/96	- 43/96
3	1/3	5	1/27	121/27
1	3	6	243	364
1	2	8	128	255

19. $9.2 \cdot 10^{11}$ Tonnen
20. a) 2/3 b) 6 2/3 c) - d) 1.9990234 e) 1'000'000
21. 64, 20.25 oder 448, 141.75
22. $q \leq 2/3$

23. -

2 Abschreibungen

1.

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		40’000
1	5’000	35’000
2	5’000	30’000
3	5’000	25’000
4	5’000	20’000
5	5’000	15’000
6	5’000	10’000

2.

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		50’000
1	15’000	35’000
2	11’500	23’500
3	8’000	15’500
4	4’500	11’000
5	1’000	10’000

3.

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		17’000
1	3’150	13’850
2	2’800	11’050
3	2’450	8’600
4	2’100	6’500
5	1’750	4’750
6	1’400	3’350
7	1’050	2’300
8	700	1’600
9	350	1’250

4. $N = \log_{1-p/100} R_N/A$ $\qquad p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[N]{R_N/A}\right)$

5.

Jahr	Abschreibung	Restwert
0		90’000.00
1	12’567.85	77’432.15
2	10’812.85	66’619.30
3	9’302.90	57’316.40
4	8’003.85	49’312.55
5	6’886.15	42’426.40
6	5’924.55	36’501.85
7	5’057.20	31’404.65
8	4’385.45	27’019.20
9	3’773.05	23’246.15
10	3’246.05	20’000.00

3 Rentenmathematik

1. $K_0 = K_n \cdot r^{-n}$ $n = \log_r K_n / K_0$ $p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{K_n / K_0} - 1 \right)$

2. 9’835.75
3. 17
4. 4.0604
5. 0.4868
6. a) 89’542.38 b) 90’305.56 c) 90’700.92 d) 90’969.84
e) 91’074.43 f) 91101.4472
7. a) p=20% $r = \ln\left(120/100\right) = 0.1823 = 18.23\%$
b) $K_1 = 100 \cdot e^{0.1} = 110.5171$ p=10.5171 %
8. a) 0.1823 b) – 0.1054 c) 0.1618 d) – 0.1131 e) 0.0153 f) – 0.0135
g) R = - 0.0343 r = - 0.0349 h) R = 20.0924 % r = 18.3091 %
9. 0.1657

10. –
11. –
12. 65’566.2736
13. –
14. –
15. 7’491.1551
16. a) 11’589.90 b) 21’997.60 c) 10.36 d) 121’513.84 e) 10.0467
17. 110’683.30
18. 2’794.1
19. 14’960.25 **20.** 14’154.95 **21.** 8’922.85 **22.** 1347
23. –
24. 192’908.25 **25.** 742.50 **26.** 455’773.50, 2’207.00
27. –
28. -
29. a) 81’726.6 b) 90’823.9
30. –
31. 611’000, 1’679.10
32. 57.68 Mte., $K_{57} = 677.3$ $K_{58} = 677.3 \cdot 1.005 \cong 680.70$
33. A: 21’257.90, B: 26’029.90, A
34. a) 14.57 b) 6’721.20 c) 870.45
35. a) 45’260.25 b) 5’260.25 c) 1’052.05
36. 854.85 **37.** 80.48
38. $K_n = 3\frac{1}{16} A \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1}$ A=519.20
39. a) $K_2 = \left(A + \frac{Ap}{100} \cdot \frac{1}{4} \right) 1.05 + \left(A + \frac{Ap}{100} \cdot \frac{1}{2} \right) = 2.088125A$ b) $K_{2n} = K_2 \frac{1.05^{2n} - 1}{1.05^2 - 1}$
40. 4’573.5 **41.** a) 609 b) 12.5693
42. 542232.75 **43.** 563922.06 **44.** 148650.35 **45.** 154596.35
Zusatzaufgabe 1 K1 = 13472.71, Delta = K18 = 356402.34
Zusatzaufgabe 2 **a)** 6096.25 sFr. 12.008 Jahre b) 18'096.25 , 1484.21 sFr.
46. -

47. a) 93’153.20 b) 18’572.60 c) 67’646.80
48. –
49. 18.85 J. 3’860 **50.** 19’268.45 **51.** 7400.25 7’770.25
52. -
53. a) 8’741.15 b) 8’131.30 c) 704.20 d) 700.-
54. a) 10’595.10 64.86 Quartale, Restschuld nach 64 Q = 1’926.-
b) 9’764.70 64.45 Quartale, Restschuld nach 64 Q = 1’015.50
55. a) 30.0565 b) 2094.05 **56.** 16’672.-
57. a) 6’100 b) 18.96 halbe Jahre c) 959.60
58. 18’354.75 **59.** a) 109.40 b) 2.9087
60. a) 50’261.20 b) 24’694.65 c) 12’240.25 d) 4’056.50
61. a) 14.27 Jahre b) 2’355.25 c) 2’543.65
62. S_{10} = 7’425’440.80 A = 242’082.30
63. 1’431.95
64. a) 7’053.95 b) 5.2559% c) 7.806% d) 7.625% e) 8.331% f) 282.45
g) 6.1456% h) 6.77% i) 17768.80 j) 287.18 k) 303.26

65. a) 8.3997 b) 7.2195 c) 726.70 Kaution nicht berücksichtigt (708.- Kaution berücksichtigt) d) 531.60 (550.30) e) 550.25 f) 36’136.55
66. 34082.5 **67.** 34082.5 + 9518.37 = 43600.87
68. –
69. $A_1 = 8'500$ $A_8 = 6'050$ $Z_6 = 1'750$ $Z = 19'250$
70. $N = 80 \text{Quartale}$ $T = 1'250$ $Z_{20Q} = 1'525$ $Z_{29Q} = 1'300$ $A_{40Q} = 2'275$ $Z = 81'000$
71. 80, 1’250, 2’000, 1’025, 81’000
72. a) 310 b) 98 c) 3’660
73. $Z_1 = 4'360.-$ $Z_2 = 3'400.-$ $Z_3 = 2'440.-$ $Z_4 = 1'480.-$ $Z_5 = 520.-$ $Z = 12'200.-$
74. a) $Z_{10} = 1650.-$ $Z_{15} = 900.-$ $Z_{20} = 150.-$ b) Z = 31’500.-
75. a) 3.- b) 21’780.-
76. $Z_1 = 3'825.-$ $Z_2 = 2'745.-$ $Z_3 = 1'665.-$ $Z_4 = 585.-$ $Z = 8'820.-$
77. a) 2117.05 b1) 2’487.50 b2) 30’750.- b3) 787.50